គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ

MathToday

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតវិទ្យាល័យ

អាំងតេក្រាលកំណត់

១០១លំហាត់ជ្រើសរើស

ជំនួយស្មារតីសិស្សថ្នាក់ទី១២

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិតនិងថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

អ្នករៀបរៀង លឹម ផល្គុន

2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ

Mathtoday

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតវិទ្យាល័យ

១០១លំហាត់ជ្រើសរើស

អាំងតេក្រាលកំណត់

ជំនួយស្មារតីសិស្សថ្នាក់ទី១២

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិតនិងថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

អ្នករៀបរៀង លឹម ផល្គុន

2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

អ្នកនិពន្ធ

ឈ្មោះ **លឹម ផល្គុន**

ទូរស័ព្ទ ០១៧ ២៥០ ២៩០

អ៊ីម៉ែល phalkunlim@yahoo.com

ប្លុក www.mathtoday.wordpress.com

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !!!

សៀវភៅ **១០១ លំហាត់ជ្រើសរើស ផ្នែកមេរៀនអាំងតេក្រាលកំណត់** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់អាននៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទ បានរៀបរៀងឡើង ក្នុងគោលបំណង ទុកជាឯកសា ជំនួយស្មារតី ដល់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត និងថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គមដើម្បីសិក្សាស្រាវជ្រាវពង្រឹងសមត្ថភាពលើមុខវិជ្ជា អាំងតេក្រាលកំណត់ ឲ្យកាន់តែយល់ច្បាស់បន្ថែមទៀតនិងដើម្បីត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិក្នុងពេលដ៏ខាងមុខនេះ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន៤ជំពូក។នៅក្នុងជំពូកទី១ ជាមេរៀនសង្ខេបនិងរូបមន្តពាក់ព័ន្ធសំខាន់ៗ ។ជំពូកទី២ជាផ្នែកលំហាត់ជ្រើសរើសនិងដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយ ជំពូកទី៣ ជាផ្នែកលំហាត់កិច្ចការផ្ទះដើម្បីឲ្យ ហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯងនិងជំពូកទី៤ ជាវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗនិងរូបមន្តសង្ខេប។

ខ្ញុំបាទអ្នកនិពន្ធនិងរៀបរៀងសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះអាចចូលរួមចំណែកដល់ប្អូនៗអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវទាំងអស់ ក្នុងការពង្រឹងចំណេះដឹងផ្នែកមេរៀននិងដំណោះស្រាយលំហាត់ប្រូបាប៊ីលីតេ ដើម្បីត្រៀមខ្លួនប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិនិងការប្រឡងផ្សេងៗទៀតជាក់ជាមិនខានឡើយ។ ម្យ៉ាងទៀតខ្ញុំបាទសូមអធ្យាស្រ័យពីសំណាក់អ្នកអាន នូវរាល់ពាក្យពេចន៍ ឬបច្ចេកទេស ដែលខ្វះខាត ដោយអចេតនា និងរង់ចាំជានិច្ចនូវរាល់មតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឲ្យកាន់តែមានសុក្រិតភាពជាបន្ថែមទៀត។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទអ្នកនិពន្ធនិងរៀបរៀងសៀវភៅនេះសូមគោរពជូនពរអ្នកសិក្សាទាំងអស់ សូមមានសុខភាពល្អ មានកម្លាំងមាំមួន និងទទួលបានជោគជ័យជានិច្ចក្នុងកិច្ចប្រកបការងារផ្សេងៗ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី១៨ មីនា ឆ្នាំ២០២០

អ្នកនិពន្ធនិងរៀបរៀង **លឹម ផល្គុន**

មាតិការឿង

		ទំព័រ
ជំពូកទី០១	សង្ខេបមេរៀនអាំងតេក្រាលកំណត់	០០១
ជំពូកទី០២	លំហាត់ជ្រើសរើសអមដោយដំណោះស្រាយ (រួមមាន ១០១ លំហាត់អមដោយដំណោះស្រាយ)	០០៤
ជំពូកទី០៣	លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ (រួមមាន ៤៨ លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ)	១១៥
ជំពូកទី០៤	វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗគួរកត់សម្គាល់ (២១វិធីសាស្ត្រសំខាន់ៗ)	១២១
	រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗគួរកត់សម្គាល់	១៤៧

បម្រាម

ហាមយកសៀវភៅនេះទៅថតចម្លងឬធ្វើអាជីវកម្ម

ដោយគ្មានការអនុញ្ញាតពីអ្នកនិពន្ធនិងរៀបរៀង ។

អ្នកដែលលួចថតចម្លងសៀវភៅនេះ ត្រូវទទួលខុសត្រូវចំពោះមុខច្បាប់

រក្សាសិទ្ធិគ្រប់បែបយ៉ាងដោយអ្នកនិពន្ធ **គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ**

ជំពូកទី០១

សង្ខេបមេរៀនអាំងតេក្រាលកំណត់

១.រូបមន្តញូតុនឡៃបនិច

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាផលដក $F(b)-F(a)$ ។ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x).dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b)-F(a)$ ។

២.លក្ខណះអាំងតេក្រាលកំណត់

២.១. $\int_a^a f(x).dx = 0$

២.២. $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

២.៣. $\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$

២.៤. $\int_a^b [f(x)+g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$

២.៥. $\int_a^b [f(x)-g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$

២.៦. $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(z).dz = \int_a^b f(t).dt$

៣-រូបមន្តប្តូរអថេរ

❖សន្មតថាគេមាន $I=\int_a^b f(x).dx \ \ (1)$ បើគេតាង $x=\phi(t)$ នាំឲ្យ $dx=\phi'(t).dt$

ហើយចំពោះ $x\in[a,b]$ នោះ $t\in[t_1,t_2]$ ។

ដូចនេះ $I=\int_a^b f(x).dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\phi(t)].\phi'(t).dt$ ។

❖សន្មតថាគេមាន $I=\int_a^b f\left[\phi(x)\right].\phi'(x).dx$ (2)

បើគេតាង $u=\phi(x)$ នាំឲ្យ $du=\phi'(x).dx$

ចំពោះ $x\in\left[a,b\right]$ នោះ $u\in\left[\phi(a),\phi(b)\right]$

គេបាន $I=\int_a^b f\left[\phi(x)\right].\phi'(x).dx=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u).du$ ។

៤.រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int_a^b u.dv=\left[u.v\right]_a^b-\int_a^b v.du$$

៥.ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

❖បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$, $x=b$ កំណត់ដោយ៖

$S=\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x)\geq 0$ ។

❖បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$, $x=b$ កំណត់ដោយ ៖

$S=-\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x)\leq 0$ ។

❖បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរកំណត់ដោយ ៖

$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$ ដែល $f(x)\geq g(x)$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ ។

៦-មាឌសូលីត

❖បើអនុគមន៍ f វិជ្ជមានហើយជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌនៃសូលីដ

បរិវត្តន៍បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស៍អាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ អក្ស៍អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ

$$V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\pi f^2(x_k).\Delta x\right]=\pi\int_a^b f^2(x).dx$$ ។

❖មាឌនៃសូលីដបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស៍ (ox) នៃផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាប $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែល $f(x)\geq g(x)$ កំណត់ដោយ

$$V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right].dx$$ ។

អនុគមន៍ F ដែលកំណត់លើចន្លោះ $[a,b]$ ដោយ $F(x)=\int_a^x f(t).dt$ ហៅថាអនុគមន៍កំណត់តាមអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

៧-តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍មួយ

តម្លៃមធ្យមនៃ f កំណត់ជាប់លើ $[a,b]$ គឺ $y_m=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$

៨-ប្រវែងធ្នូនៃក្រាប

ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាង f លើ $[a,b]$ គឺ $L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}.dx$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០២

លំហាត់ជ្រើសរើសនិងដំណោះស្រាយ

Problem01 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ១៩ សីហា ឆ្នាំ២០១៩)

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 (x^2+1)^2dx$, $J=\int_0^{\ln 6}(e^x-1)\,dx$

និង $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin(3x+\frac{\pi}{4})+\sin^4 x\cos x\right]dx$ ។

Solution គណនាអាំងតេក្រាល ៖

យើងបាន $I=\int_0^1 (x^2+1)^2dx=\int_0^1 (x^4+2x^2+1)\,dx$

$$=\int_0^1 x^4dx+2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1+2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1=\frac{28}{15}$$

$$J=\int_0^{\ln 6}(e^x-1)\,dx=\int_0^{\ln 6}e^x\,dx-\int_0^{\ln 6}dx=\left[e^x\right]_0^{\ln 6}-\left[x\right]_0^{\ln 6}$$

$$=\left(e^{\ln 6}-e^0\right)-\left(\ln 6-0\right)=5-\ln 6$$ ។

និង $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin(3x+\frac{\pi}{4})+\sin^4 x\cos x\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(3x+\frac{\pi}{4})\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\cos x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\cos(3x+\frac{\pi}{4})\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\cos\pi+\frac{1}{5}\sin^5\frac{\pi}{4}\right]-\left[-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}+0\right]=\frac{40+23\sqrt{2}}{120}$$

ដូចនេះ៖ $I=\frac{28}{15}$, $J=\int_0^{\ln 6}(e^x-1)\,dx=5-\ln 6,\ K=\frac{40+23\sqrt{2}}{120}$ ។

Problem02 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ២០ សីហា ឆ្នាំ២០១៨)

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(2-x+x^2\right)dx$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$ និង $K=\int_2^3\left(3x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល

យើងបាន $I=\int_1^2\left(2-x+x^2\right)dx=\int_1^2 2dx-\int_1^2 xdx+\int_1^2 x^2dx$

$$=\left[2x\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=2-\frac{3}{2}+\frac{7}{3}=\frac{12-9+14}{6}=\frac{17}{6}$$ ។

ដូចនេះ $I=\frac{17}{6}$ ។

យើងបាន $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1}{2}-0\right)-\frac{1}{2}(0-0)=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $J=\frac{1}{2}$ ។

យើងបាន $K=\int_2^3\left(3x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_2^3 3xdx-\int_2^3 2dx+\int_2^3\frac{dx}{x-1}$

$$=3\int_2^3 xdx-2\int_2^3 dx+\int_2^3\frac{(x-1)'}{(x-1)}dx$$

$$=3\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3-2\left[x\right]_2^3+\left[\ln|x-1|\right]_2^3$$

$$=3\left(\frac{9}{2}-2\right)-2(3-2)+\ln 2-\ln 1=\frac{15}{2}-2+\ln 2=\frac{11}{2}+\ln 2$$

ដូចនេះ $K=\frac{11}{2}+\ln 2$ ។

Problem03 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ២១ សីហា ឆ្នាំ២០១៧)

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^3\left(x-2+3x^2\right)dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x-\cos x\right)dx$,

$K=\int_0^1\frac{x^3+\left(x+1\right)^2}{x^2+1}dx$ ។

ដើម្បីគណនា K យើងត្រូវបង្ហាញថា $\frac{x^3+\left(x+1\right)^2}{x^2+1}=x+1+\frac{x}{x^2+1}$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល

យើងបាន $I=\int_1^3\left(x-2+3x^2\right)dx$

$$=\int_1^3 xdx-\int_1^3 2dx+\int_1^3 3x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3-\left[2x\right]_1^3+\left[x^3\right]_1^3$$

$$=\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(6-2\right)+\left(27-1\right)=4-4+26=26$$

ដូចនេះ $I=\int_1^3\left(x-2+3x^2\right)dx\ =26$ ។

យើងបាន $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x-\cos x\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(0+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x-\cos x\right)dx=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ ។

$K=\int_0^1\frac{x^3+\left(x+1\right)^2}{x^2+1}dx$

យើងត្រូវបង្ហាញថា $\frac{x^3+\left(x+1\right)^2}{x^2+1}=x+1+\frac{x}{x^2+1}$

យើងមាន $x+1+\frac{x}{x^2+1}=\frac{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)+x}{x^2+1}$

$$= \frac{x^3 + x + x^2 + 1 + x}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + \left(x^2 + 2x + 1\right)}{x^2 + 1}$$

នោះ $x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1}$ ពិត

យើងបាន $K = \int_0^1 \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(x + 1 + \frac{x}{x^2+1} \right) dx$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{\left(x^2+1\right)} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1$$

$$= (\frac{1}{2} - 0) + (1 - 0) + \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$$

ដូចនេះ $K = \frac{3 + \ln 2}{2}$ ។

Problem04 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ២៨ សីហា ឆ្នាំ២០១៦)

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^2 (6x^2 - 3x - 1)dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 x)dx$ ។

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ $f(x) = -2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$ ។

បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$ ។ គណនា $K = \int_1^e f(x)dx$ ។ ($\ln e = 1$)។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int_0^2 (6x^2 - 3x - 1)dx = 6\int_0^2 x^2 dx - 3\int_0^2 x dx - \int_0^2 dx$$

$$= 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[x\right]_0^2 = 6\left(\frac{8}{3} - 0\right) - 3\left(\frac{4}{2} - 0\right) - \left(2 - 0\right)$$

$$= 16 - 6 - 2 = 8$$

ដូចនេះ $I = 8$ ។

$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2 x\right)dx$ ដោយ $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$

គេបាន $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $J=\frac{1}{2}$ ។

បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$

គេមាន $f(x)=-2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)=\frac{-2x-2}{x^2}=-\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$ ពិតគ្រប់ $x\in\mathbb{R}^*$ ។

ដូចនេះ $f(x)=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$ ។

គណនា $K=\int_1^e f(x)dx$

យើងបាន $K=\int_1^e\left(-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right).dx$

$$=-2\int_1^e\frac{dx}{x}-2\int_1^e\frac{dx}{x^2}=-2\left[\ln|x|\right]_1^e+2\left[\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$=-2\left(\ln e-\ln 1\right)+2\left(\frac{1}{e}-1\right)=-2+\frac{2}{e}-2=-4+\frac{2}{e}$$

ដូចនេះ $K=-4+\frac{2}{e}$ ។

Problem05 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ២៤ សីហា ឆ្នាំ២០១៨)

ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx$ ។

ខ.គេមានអនុគមន៍ $f(x)=-\frac{2-x}{(x-1)^2}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$ ។

គណនា $K=\int_{-1}^{0}f(x)dx$ ។

Solution

ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx$

យើងបាន $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}+3x\right]_1^2$

$$=\left(\frac{8}{9}-1+6\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+3\right)=\frac{7}{9}+\frac{1}{4}+2=\frac{109}{36}$$

ដូចនេះ $I=\frac{109}{36}$ ។

ខ.បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$

គេបាន $f(x)=-\frac{2-x}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$

ដូចនេះ $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$ ។

គណនា $K=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

ដោយ $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$ នោះយើងបាន ៖

$$K=-\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)^2}+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)}=-\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)'dx}{(x-1)^2}+\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)'dx}{(x-1)}$$

$$=\left[\frac{1}{x-1}\right]_{-1}^{0}+\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}=-1+\frac{1}{2}+\ln 1-\ln 2=-\frac{1}{2}-\ln 2$$

ដូចនេះ $K=-\frac{1}{2}-\ln 2$ ។

Problem06

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ០៥ សីហា ឆ្នាំ២០១៣)

១.កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន៖

$$\frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{m}{x-2}+\frac{nx+p}{x^2+x+1}$$ ដែល $x\neq 2$ ។

២-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}.dx$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p

គេបាន $\frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{m}{x-2}+\frac{nx+p}{x^2+x+1}$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $(x-2)(x^2+x+1)$ គេបាន ៖

$$x^2+6x+5=m(x^2+x+1)+(x-2)(nx+p)$$
$$x^2+6x+5=mx^2+mx+m+nx^2+px-2nx-2p$$
$$x^2+6x+5=(m+n)x^2+(m+p-2n)x+(m-2p)$$

គេទាញ $\begin{cases} m+n=1 & (1) \\ m+p-2n=6 & (2) \\ m-2p=5 & (3) \end{cases}$

តាម(2)គេទាញ $p=6-m+2n$ (4) យកជួសក្នុង(3)គេបាន ៖

$$m-2(6-m+2n)=5$$
$$m-12+2m-4n=5$$
$$3m-4n=17 \quad (5)$$

តាម(1)គេទាញ $n=1-m$ (6) យកជួសក្នុង(5)គេបាន ៖

$$3m-4(1-m)=17$$
$$3m-4+4m=17$$
$$7m=21 \Rightarrow m=3$$

តាម(6)គេបាន $n=1-3=-2$ ហើយតាម(4) គេបាន $p=6-3+2(-2)=-1$

ដូចនេះ $m=3\ ,\ n=-2\ ,\ p=-1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល I

ចំពោះ $m=3\ ,\ n=-2\ ,\ p=-1$ គេបាន ៖

$$\frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{3}{x-2}+\frac{-2x-1}{x^2+x+1}=\frac{3}{x-2}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

គេបាន $I=\int_0^1\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right).dx=3\int_0^1\frac{dx}{x-2}-\int_0^1\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}.dx$

$$=3\int_0^1\frac{(x-2)'}{x-2}.dx-\int_0^1\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}.dx$$
$$=\left[3\ln|x-2|\right]_0^1-\left[\ln|x^2+x+1|\right]_0^1$$
$$=\left[3\ln|(-1)|-3\ln|(-2)|\right]-\left[\ln(3)-\ln(1)\right]$$
$$=-3\ln 2-\ln 3=-(\ln 2^3+\ln 3)=-\ln 24$$

ដូចនេះ $I=-\ln(24)$ ។

Problem07 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ០៦ សីហា ឆ្នាំ២០០៧)

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x\neq -2, x\neq 1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}\right)dx$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ៖

យើងមាន $$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$$

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a(x-1)(x+2)+b(x+2)+c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$x^2-2x-2=(a+c)x^2+(a+b-2c)x+(-2a+2b+c)$$

គេទាញ $\begin{cases}a+c=1\\a+b-2c=-2\\-2a+2b+c=-2\end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយ $a=\frac{1}{3}, b=-1, c=\frac{2}{3}$ ។

ដូចនេះ $a=\frac{1}{3}, b=-1, c=\frac{2}{3}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}\right)dx$

យើងមាន $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$ ដោយ $a=\frac{1}{3}, b=-1, c=\frac{2}{3}$

នោះ $$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{x+2}$$

យើងបាន $$I=\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{x+2}\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\ln|x+2|\right]_{-1}^{0}$$

$$=\left(0-1+\frac{2}{3}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{2}+0\right)$$

ដូចនេះ $I=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$ ។

Problem08 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ០៧ សីហា ឆ្នាំ២០០៦)

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន $\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}$

ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{x^2(x+1)}\right)dx$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c

គេមាន $\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}$

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{ax(x+1)+b(x+1)+cx^2}{x^2(x+1)}=\frac{(a+c)x^2+(a+b)x+b}{x^2(x+1)}$$

គេទាញ $\begin{cases}a+c=0\\a+b=2\\b=1\end{cases}$ នោះ $a=1\,,b=1\,,c=-1$ ។

ដូចនេះ $a=1\,,b=1\,,c=-1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{x^2(x+1)}\right)dx$

ចំពោះ $a=1\,,b=1\,,c=-1$ នោះ $\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}$

យើងបាន $I=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{x^2(x+1)}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\left[\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln|x+1|\right]_1^2$$

$$=\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\ln 3\right)-\left(0-1-\ln 2\right)=\frac{1}{2}+2\ln 2-\ln 3$$

ដូចនេះ $I=\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$ ។

Problem09 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ០៨ សីហា ឆ្នាំ២០០៨)

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0, x\neq 1$ ។

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីបាន ៖

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0, x\neq 1$ ។

២.គណនា $I=\int_2^3 f(x)\,dx$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b,c ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ (1) និង $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$ (2)

ផ្ទឹម (1) & (2) គេបាន $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$

$$\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}=\frac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$$

$$\frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}=\frac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$$

គេទាញ $\begin{cases}a+b=3\\-2a-b+c=-5\\a=-2\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}a=-2\\b=5\\c=-4\end{cases}$

ដូចនេះ $a=-2$, $b=5$, $c=-4$ ។

២.គណនា $I=\int_2^3 f(x)\,dx$ ៖

ចំពោះ $a=-2$, $b=5$, $c=-4$ យើងបាន $f(x)=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{(x-1)^2}$

យើងបាន $I=\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\left[-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{(x-1)^2}\right]dx$

$$=\left[-2\ln|x|+5\ln|x-1|+\frac{4}{x-1}\right]_2^3$$

$$=\left[-2\ln 3+5\ln 2+2\right]-\left[-2\ln 2+0+4\right]$$

$$=-2+7\ln 2-2\ln 3$$

ដូចនេះ $I=-2+7\ln 2-2\ln 3$ ។

Problem10 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ០៦ សីហា ឆ្នាំ២០០៤)

គេឲ្យ $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ ។

១.កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $g(x)=m+\dfrac{n}{x+1}+\dfrac{p}{x-3}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in(-1,3)$ ។

២.គណនា $I=\int_0^2 g(x)\,dx$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p ៖

គេមាន $g(x)=m+\dfrac{n}{x+1}+\dfrac{p}{x-3}$ និង $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

យើងបាន $m+\dfrac{n}{x+1}+\dfrac{p}{x-3}=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

$$\frac{m(x^2-2x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{x^2-2x-3}=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{mx^2+(-2m+n+p)x+(-3m-3n+p)}{x^2-2x-3}=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} m=1 \\ -2m+n+p=1 \\ -3m-3n+p=-6 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} m=1 \\ n+p=3 \\ -3n+p=-3 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $m=1\ ,\ n=\dfrac{3}{2}\ ,\ p=\dfrac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ $m=1\ ,\ n=\dfrac{3}{2}\ ,\ p=\dfrac{3}{2}$ ។

២.គណនា $I=\int_0^2 g(x)\,dx$ ៖

ចំពោះ $m=1\ ,\ n=\dfrac{3}{2}\ ,\ p=\dfrac{3}{2}$ គេបាន $g(x)=1+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x-3}$

គេបាន $I=\int_0^2\left(1+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x-3}\right)dx$

$$I=\left[x+\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|\right]_0^2$$

$$=\left(2+\frac{3}{2}\ln 3\right)-\left(\frac{3}{2}\ln 3\right)=2$$ ។ ដូចនេះ $I=2$ ។

Problem11 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ០៨ សីហា ឆ្នាំ២០០៣)

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ។

១.សរសេរ $f(x)$ ជារាង $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ ដែល A,B,C ជាចំនួនថេរត្រូវរក។

២.គណនា $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$ ។

Solution

១.សរសេរ $f(x)$ ជារាង $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ ដែល A,B,C ជាចំនួនថេរត្រូវរក៖

យើងបាន $f(x)=\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

គេទាញ $\begin{cases}A=6\\A+B=5\\2A+B+C=20\end{cases}$ នោះ $A=6\,,\,B=-1\,,\,C=9$ ។

ដូចនេះ $f(x)=\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{9}{(x+1)^2}$ ។

២.គណនា $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$ ៖

ដោយ $f(x)=\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{9}{(x+1)^2}$

គេបាន $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx=\int\frac{6}{x}dx-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{9}{(x+1)^2}$

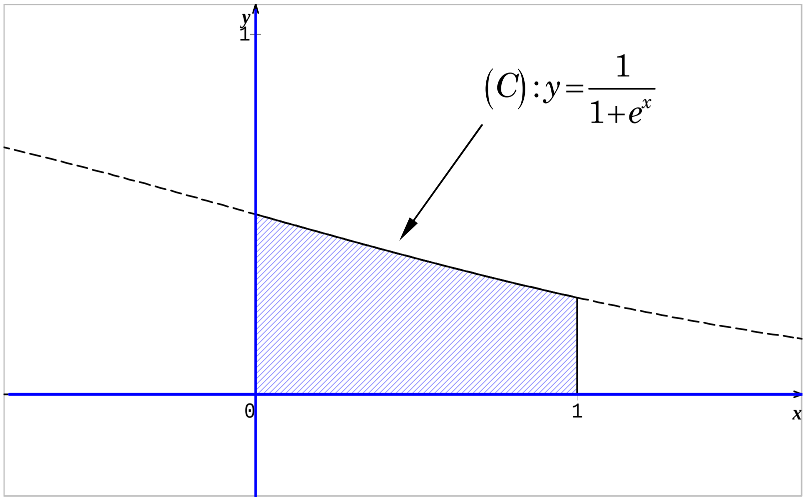
$$=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+C$$

ដូចនេះ៖ $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx\;=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+C$ ។

Problem12 (ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ២២ កក្កដា ឆ្នាំ២០០២)

១.កំណត់តម្លៃនៃ α និង β ដែលចំពោះគ្រប់ x គេបាន $\dfrac{1}{1+e^x}=\alpha+\dfrac{\beta e^x}{1+e^x}$ ។

២.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលគូសធូតនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (xoy) ។



Solution

១.កំណត់តម្លៃនៃ α និង β ៖

ដោយ $\dfrac{1}{1+e^x}=\alpha+\dfrac{\beta e^x}{1+e^x}$

សមមូល $\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^x}{1+e^x}$

នោះគេទាញ $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\end{cases}$

ដូចនេះ $\alpha=1$, $\beta=-1$ ។

២.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលគូសធូតនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (xoy) ៖

យើងតាង S ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកធូតដែលខណ្ឌដោយក្រាប $(C):y=\dfrac{1}{1+e^x}$ និងអ័ក្ស

អាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ឈរ $x=0$, $x=1$ ។

យើងបាន $S=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ ដោយ $\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$ (សម្រាយខាងលើ)

នោះ $$S=\int_0^1 (1-\frac{e^x}{1+e^x})dx=\left[x-\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1$$

$$=\left[1-\ln(1+e)\right]-\left(0-\ln 2\right)=1+\ln(\frac{2}{1+e})$$

ដូចនេះ $S=\ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

Problem13

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^2 (3x^2-2x+3)dx \ , J=\int_0^1 (e^{2x}-e^x+1)\,dx \ , K=\int_1^2\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^2 (3x^2-2x+3)dx \ =\left[x^3-x^2+3x\right]_1^2=\left(8-4+3\right)-\left(1-1+3\right)=4$$

$$J=\int_0^1 (e^{2x}-e^x+1)\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}e^2-e+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$J=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}$ ។

$$K=\int_1^2\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x+3|-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(\ln 5-\frac{1}{2}\right)-\left(\ln 4-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{5}{4}$$ ។

Problem14

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^2 (4x^3-2x+1)dx \ , J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-2\sin 2x)\,dx \ , K=\int_1^4\left(\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^2 (4x^3-2x+1)dx \ =\left[x^4-x^2+x\right]_1^2=\left(16-4+2\right)-\left(1-1+1\right)=13$$ ។

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-2\sin 2x)\,dx \ =\left[\sin x+\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=(1-1)-(0+1)=-1$$

$$K=\int_1^4\left(\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\left[\ln|2x+1|+2\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$=(\ln 9+4)-(\ln 3+2)=2+\ln 3$$

ដូចនេះ $I=13\ ,\ J=-1\ ,\ K=2+\ln 3$ ។

Problem15

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^1(5x^2-3)^2dx \ ,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)^2\,dx\ ,\ K=\int_1^4\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}\right)dx$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^1(5x^2-3)^2dx \ =\int_0^1\left(25x^4-30x^2+9\right)dx=\left[5x^5-10x^3+9x\right]_0^1$$

$$=(5-10+9)-(0)=4 \ \text{។}$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)^2\,dx \ =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(0-\frac{1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $J=1+\dfrac{\pi}{2}$ ។

$$K=\int_1^4\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}\right)=\left[\ln x+4\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right]_1^4=\left(\ln 4+8+\frac{3}{4}\right)-(\ln 1+4+3)$$

ដូចនេះ $K=\dfrac{7}{4}+2\ln 2$ ។

Problem16

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}\ \ ,\ J=\int_1^2 x(4x-6)^2dx \ \text{ និង }\ K=\int_1^3\frac{2x-1}{x^2-x+2}\,dx$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ $I=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ។

$$J=\int_1^2 x(4x-6)^2\,dx=\int_1^2\left(16x^3-48x^2+36x\right)dx$$

$$=\left[4x^4-16x^3+18x^2\right]_1^2$$

$$=(64-128+72)-(4-16+18)=2$$

ដូចនេះ $J=2$ ។

$$K=\int_1^3\frac{2x-1}{x^2-x+2}\,dx=\int_1^3\frac{(x^2-x+2)'}{x^2-x+2}\,dx=\left[\ln\left|x^2-x+2\right|\right]_1^3$$

$$=\ln(9-3+2)-\ln(1-1+2)=\ln 8-\ln 2=\ln 4=2\ln 2$$ ។

ដូចនេះ $K=2\ln 2$ ។

Problem17

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}\quad,\quad J=\int_1^2(3x^2+2x-5)dx\quad \text{និង}\quad K=\int_0^3\frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}=\left[-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$J=\int_1^2(3x^2+2x-5)dx=\left[x^3+x^2-x\right]_1^2=(8+4-2)-(1+1-1)=9$$

$$K=\int_0^3 \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx=\int_0^3\frac{(x^2+x+4)'}{(x^2+x+4)}dx=\left[\ln\left(x^2+x+4\right)\right]_0^3$$

$$=\ln 16-\ln 4=\ln\frac{16}{4}=\ln 4=2\ln 2 \text{ ។}$$

ដូចនេះ: $I=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $J=9$ និង $K=2\ln 2$ ។

Problem18

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^2(5x^4-6x^2+1)\,dx \quad , \; J=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+e^x)dx \;\text{ និង }\; K=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^2(5x^4-6x^2+1)\,dx=\left[x^5-2x^3+x\right]_1^2=\left(32-16+2\right)-\left(1-2+1\right)=18 \text{ ។}$$

$$J=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+e^x)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^x\right]_0^{\ln 2}=(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\text{ ។}$$

$$K=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2} \text{ ។}$$

Problem19

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{(x+1)(x+4)}{x^2+x+2}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

$a)$ កំណត់បីចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=m+\frac{nx+p}{x^2+x+2}$ ។

$b)$ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^5\frac{(x+1)(x+4)}{x^2+x+2}\,dx$

Solution

$a)$ **កំណត់បីចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន** $f(x)=m+\frac{nx+p}{x^2+x+2}$

យើងមាន $f(x)=\frac{(x+1)(x+4)}{x^2+x+2}$ និង $f(x)=m+\frac{nx+p}{x^2+x+2}$

យើងបាន $m+\dfrac{nx+p}{x^2+x+2}=\dfrac{(x+1)(x+4)}{x^2+x+2}$

សមមូល $mx^2+(m+n)x+(2m+p)=x^2+5x+4$

គេទាញ $\begin{cases} m=1 \\ m+n=5 \\ 2m+p=4 \end{cases}$ សមមូល $m=1\ ,n=4,p=2$ ។

ដូចនេះ សមមូល $m=1\ ,n=4,p=2$ ។

$b)$ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_1^5 \dfrac{(x+1)(x+4)}{x^2+x+2}\,dx$

ចំពោះ $m=1\ ,n=4,p=2$ គេបាន $f(x)=1+\dfrac{4x+2}{x^2+x+2}$

យើងបាន $I=\displaystyle\int_1^5\left(1+\dfrac{4x+2}{x^2+x+2}\right)dx$

$$=\int_1^5 dx+2\int_1^5\frac{(x^2+x+2)'}{(x^2+x+2)}\,dx$$

$$=\left[x\right]_1^5+2\left[\ln\left(x^2+x+2\right)\right]_1^5$$

$$=\left(5-1\right)+2\left(\ln 32-\ln 4\right)=4+6\ln 2$$

ដូចនេះ $I=2\left(2+3\ln 2\right)$ ។

Problem20

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1+\sin x+x\cos x}{(1+\sin x)(x+\cos x)}$ ដែល $x\in\left[0\ ,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ។

១.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0\ ,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\cos x}{(1+\sin x)(x+\cos x)}\,dx$ ។

Solution

១.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0\ ,\dfrac{\pi}{2}\right]$

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\cos x}{(1+\sin x)(x+\cos x)}$

យើងបាន $f(x)=\dfrac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-1+x\cos x}{(1+\sin x)(x+\cos x)}$

$$=\frac{(\sin^2 x-1)+(\cos^2 x+x\cos x)}{(1+\sin x)(x+\cos x)}$$

$$=\frac{(\sin x-1)(\sin x+1)+\cos x(\cos x+x)}{(1+\sin x)(x+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin x-1}{x+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

ដូចនេះ: $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{(1+\sin x)(x+\cos x)}dx$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}$

យើងបាន $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$

$$=\left[\ln(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\ln(x+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\ln 2-\ln 1\right]-\left[\ln\frac{\pi}{2}-\ln 1\right]=\ln\frac{4}{\pi}$$

ដូចនេះ: $I=\ln\dfrac{4}{\pi}$ ។

Problem21

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_0^1\frac{2x^2+x}{x+1}dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_0^1\frac{2x^2+x}{x+1}dx$

គេមាន $\dfrac{2x^2+x}{x+1}=\dfrac{(x+1)(2x-1)+1}{x+1}=2x-1+\dfrac{1}{x+1}$

គេបាន $I=\displaystyle\int_0^1(2x-1+\frac{1}{x+1})dx=\left[x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^1=\ln 2$ ។

ដូចនេះ: $I=\ln 2$ ។

Problem22

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{6-5x}{(x+2)(x^2-x+2)}$ ។

១.កំណត់បីចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{m}{x+2}+\dfrac{nx+p}{x^2-x+2}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_0^2\dfrac{6-5x}{(x+2)(x^2-x+2)}dx$ ។

Solution

១.កំណត់បីចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{m}{x+2}+\dfrac{nx+p}{x^2-x+2}$

យើងបាន $\dfrac{6-5x}{(x+2)(x^2-x+2)}=\dfrac{m}{x+2}+\dfrac{nx+p}{x^2-x+2}$

សមមូល $6-5x=m(x^2-x+2)+(x+2)(nx+p)$

សមមូល $-5x+6=(m+n)x^2+(-m+2n+p)x+(2m+2p)$

គេទាញ $\begin{cases} m+n=0 \\ -m+2n+p=-5 \\ 2m+2p=6 \end{cases}$ នោះ $m=2\ ,\ n=-2\ ,p=1$ ។

ដូចនេះ $m=2\ ,\ n=-2\ ,p=1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_0^2\dfrac{6-5x}{(x+2)(x^2-x+2)}dx$

ចំពោះ $m=2\ ,\ n=-2\ ,p=1$ គេបាន

$$\frac{6-5x}{(x+2)(x^2-x+2)}=\frac{2}{x+2}-\frac{2x-1}{x^2-x+2}$$

យើងបាន $I=\int_0^2\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{2x-1}{x^2-x+2}\right)dx$

$$=\left[2\ln|x+2|-\ln|x^2-x+2|\right]_0^2$$

$$=\left[2\ln 4-\ln 4\right]-\left[2\ln 2-\ln 2\right]$$

$$=\ln 4-\ln 2=\ln\left(\frac{4}{2}\right)=\ln 2$$

ដូចនេះ $I=\ln 2$ ។

Problem23

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)dx$

ដោយ $\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$ និង $\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$

យើងបាន $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-2\right)dx$

$$=\left[\tan x-\cot x-2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}-\pi}{3}$$

ដូចនេះ $I=\frac{4\sqrt{3}-\pi}{3}$ ។

Problem24

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}$ ។

១.ចូរបង្ហាញថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ខាងលើ

អាចសរសេរជារាង $f(x)=\frac{A(e^x+1)}{e^x+x}+\frac{Be^x}{e^x+1}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_0^1\frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}dx$ ។

Solution

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ៖

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ខាងលើអាចសរសេរជារាង $f(x)=\frac{A(e^x+1)}{e^x+x}+\frac{Be^x}{e^x+1}$ (1)

យើងមាន $f(x)=\frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}$

យើងបាន $f(x)=\dfrac{1+2e^x-xe^x}{(e^x+1)(e^x+x)}=\dfrac{(e^{2x}+2e^x+1)-(e^{2x}+xe^x)}{(e^x+1)(e^x+x)}$

$$=\frac{\left(e^x+1\right)^2-e^x\left(e^x+x\right)}{(e^x+1)(e^x+x)}=\frac{e^x+1}{e^x+x}-\frac{e^x}{e^x+1}$$

$f\left(x\right)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}-\dfrac{e^x}{e^x+1}\quad(2)$

ដោយប្រៀបធៀប $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន $A=1$, $B=-1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}\,dx$

យើងមាន $f\left(x\right)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$

យើងបាន $I=\displaystyle\int_0^1\frac{e^x+1}{e^x+x}dx-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$=\left[\ln(e^x+x)\right]_0^1-\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1$$
$$=\left[\ln(e+1)-\ln(1)\right]-\left[\ln(e+1)-\ln 2\right]=\ln 2$$

ដូចនេះ $I=\ln 2$ ។

Problem25

អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{(1-\ln x)(2+2\ln x+\ln^2 x)}{x(1+\ln x)}$ ដែល $x>0$ ។

១.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x)=\dfrac{2}{x(1+\ln x)}-\dfrac{\ln^2 x}{x}$ គ្រប់ $x>0$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^e g(x)\,dx$ ។

Solution

១.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x)=\dfrac{2}{x(1+\ln x)}-\dfrac{\ln^2 x}{x}$ គ្រប់ $x>0$

គេមាន $g(x)=\dfrac{(1-\ln x)(2+2\ln x+\ln^2 x)}{x(1+\ln x)}$

$$= \frac{2 + 2\ln x + \ln^2 x - 2\ln x - 2\ln^2 x - \ln^3 x}{x(1+\ln x)}$$

$$= \frac{2 - \ln^2 x - \ln^3 x}{x(1+\ln x)} = \frac{2 - (1+\ln x)\ln^2 x}{x(1+\ln x)}$$

$$= \frac{2}{x(1+\ln x)} - \frac{(1+\ln x)\ln^2 x}{x(1+\ln x)}$$

ដូចនេះ $g(x) = \dfrac{2}{x(1+\ln x)} - \dfrac{\ln^2 x}{x}$ ពិត។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^e g(x)\,dx$

យើងបាន $I = \int_1^e \left[\dfrac{2}{x(1+\ln x)} - \dfrac{\ln^2 x}{x}\right]dx$

$$= 2\int_1^e \frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}dx - \int_1^e \ln^2 x\,(\ln x)'\,dx$$

$$= 2\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\ln^3 x\right]_1^e = 2\ln 2 - \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $I = -\dfrac{1}{3} + 2\ln 2$ ។

Problem26

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$ ដែល $x \in \mathbb{R} - \{-3,-1\}$ ។

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ ។

Solution

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3}$

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$ ដែល $x \in \mathbb{R} - \{-3,-1\}$

យើងបាន $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3} = \dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$

សមមូល $A(x+3) + B(x+1) = 3x+5$

សមមូល $(A+B)x+(3A+B)=3x+5$

គេទាញបាន $\begin{cases} A+B=3 \\ 3A+B=5 \end{cases}$ នោះ $A=1$, $B=2$ ។

ដូចនេះ $A=1$, $B=2$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

ចំពោះ $A=1$, $B=2$ គេបាន $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}$

យើងបាន $I=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)dx$

$$=\int_0^1\frac{dx}{x+1}+2\int_0^1\frac{dx}{x+3}$$
$$=\left[\ln|x+1|\right]_0^1+2\left[\ln|x+3|\right]_0^1=\left[\ln 2-\ln 1\right]+2\left[\ln 4-\ln 3\right]$$
$$=\ln 2-0+2(2\ln 2-\ln 3)=5\ln 2-\ln 3$$

ដូចនេះ $I=5\ln 2-\ln 3$ ។

Problem27

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 x\sin^2(\pi x)\cos^4(\pi x)\,dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 x\sin^2(\pi x)\cos^4(\pi x)\,dx$

តាង $x=1-t$ នោះ $dx=-dt$ ហើយចំពោះ $x=0$ នោះ $t=1$

និង $x=1$ នោះ $t=0$ ។

គេបាន $I=\int_1^0(1-t)\sin^3(\pi-\pi t)\cos^4(\pi-\pi t)(-dt)$

$$I=\int_0^1 (1-t)\sin^3(\pi t)\cos^4(\pi t)dt$$

$$I=\int_0^1 \sin^3(\pi t)\cos^4(\pi t)dt-\int_0^1 t\sin^3(\pi t)\cos^4(\pi t)dt$$

$$I=\int_0^1 [1-\cos^2(\pi t)]\cos^4(\pi t)\ \sin(\pi t)dt-I$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 [1-\cos^2(\pi t)]\cos^4(\pi t)\ \sin(\pi t)dt$$

តាង $u=\cos(\pi t)$ នោះ $du=-\pi\sin(\pi t)dt$

ចំពោះ $t=0$ នោះ $u=1$ និង $t=1$ នោះ $u=-1$ ។

គេបាន $I=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-u^2)u^4du=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{7}u^7\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{35\pi}$ ។

ដូចនេះ $I=\frac{2}{35\pi}$ ។

Problem28

គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J ។

Solution

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

យើងបាន $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+\sin^2 x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $I+J=\frac{\pi}{4}$ ។

យើងបាន $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x.dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x.dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $I - J = \frac{1}{2}$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J

គេមាន $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ និង $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ ។

Problem29

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^n \frac{dx}{2e^x + 1}$ ដែល $n = 0,1,2,3,....$

១.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{2e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

២.គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

Solution

១.ស្រាយថា $\frac{1}{2e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

គេមាន $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 2} = \frac{1}{1 + 2e^x}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{2e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

២.គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} I_n$

គេមាន $\dfrac{1}{2e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

គេបាន $I_n=\displaystyle\int_0^n\frac{dx}{2e^x+1}=\int_0^n\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}dx$

$$=\left[-\ln\left(e^{-x}+2\right)\right]_0^n=-\ln\left(e^{-n}+2\right)+\ln 3=\ln\left(\frac{3}{e^{-n}+2}\right)$$

ដូចនេះ: $I_n=\ln\left(\dfrac{3}{e^{-n}+2}\right)$ ។

ហើយ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{3}{e^{-n}+2}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ព្រោះ: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0$ ។

Problem30

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos^3x-3\sin 2x+1}{\cos^2 x}dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos^3x-3\sin 2x+1}{\cos^2 x}dx$

តាមរូបមន្ត $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos^3x-6\sin x\cos x+1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(4\cos x-6\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\left[4\sin x+6\ln|\cos x|+\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\left[4\left(\frac{1}{2}\right)+6\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{4}{3}\right]-\left[0+6\ln(1)+1\right]$$

$$=2+6\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{4}{3}-1=\frac{7}{3}+6\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ដូចនេះ: $I=\dfrac{7}{3}+6\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ។

Problem31

គេឲ្យ $I(t)=\int_0^t \frac{3.dx}{4x^2+5x+1}$ ដែល $t>0$

ក)កំណត់ a និង ដើម្បីឲ្យ $\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{4x+1}$

ខ)គណនា $I(t)$ ជាអនុគមន៍នៃ t រួចទាញរក $\lim_{t\to+\infty} I(t)$ ។

Solution

ក.កំណត់ a និង b ៖

$$\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{4x+1}$$
$$\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{a(4x+1)+b(x+1)}{(x+1)(4x+1)}$$
$$\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{(4a+b)x+(a+b)}{4x^2+5x+1}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=3 \\ 4a+b=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ , b=4$ ។

ដូចនេះ $a=-1\ , b=4$ ។

ខ.គណនា $I(t)$ ជាអនុគមន៍នៃ t ៖

ចំពោះ $a=-1\ , b=4$

គេបាន $\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{4}{4x+1}-\frac{1}{x+1}$

យើងបាន $I(t)=\int_0^t (\frac{4}{4x+1}-\frac{1}{x+1}).dx$

$$=\left[\ln|4x+1|-\ln|x+1|\right]_0^t$$

$$=\left[\ln\left|\frac{4x+1}{x+1}\right|\right]_0^t=\ln\left(\frac{4t+1}{t+1}\right)$$

ដូចនេះ $I=\ln\left(\frac{4t+1}{t+1}\right)$ ។

គណនាលីមីត $\lim_{t\to+\infty} I(t)$ ៖

គេបាន $\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{4t+1}{t+1}\right)$ ដោយ $\lim_{t\to+\infty}\frac{4t+1}{t+1} = 4$

ដូចនេះ $\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{4t+1}{t+1}\right) = \ln 4$ ។

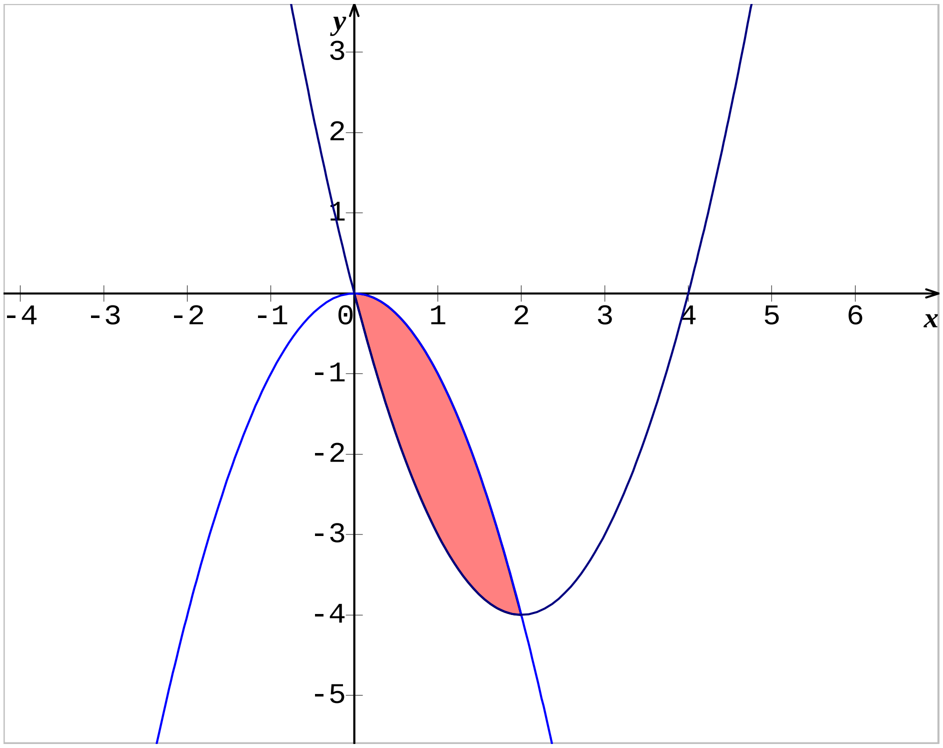
Problem32

គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $(c_1) : y = -x^2$ និង $(c_2); y = x^2 - 4x$ ។

Solution

គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

$(c_1) : y = -x^2$ និង $(c_2); y = x^2 - 4x$



យើងបាន $S = \int_0^2 \left[-x^2 - (x^2 - 4x)\right] dx$

$$= \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

ដូចនេះ $S = \frac{8}{3}$ ខ្នាតផ្ទៃក្រឡា ។

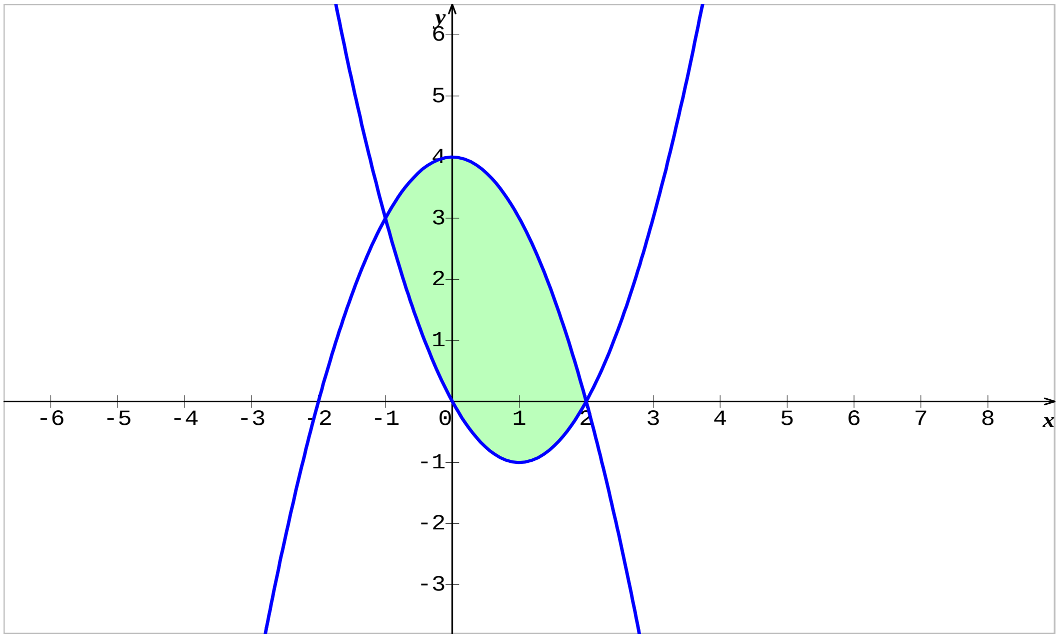
Problem33

គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $(c_1): y = 4 - x^2$ និង $(c_2); y = x^2 - 2x$ ។

Solution

គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

$(c_1): y = 4 - x^2$ និង $(c_2); y = x^2 - 2x$



យើងបាន $S = \int_{-1}^{2}\left[(4-x^2)-(x^2-2x)\right]dx = \int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$

$$S = \left[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)$$

ដូចនេះ $S = 9$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

Problem33

គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $A = \int_0^1 2xe^{x^2}dx$

ខ. $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}dx$

គ. $C = \int_0^2 \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+6}$

ឃ. $D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $A=\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\int_0^1 \left(x^2\right)' e^{x^2}dx=\left[e^{x^2}\right]_0^1=e-1$

ខ. $B=\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x}dx=\int_1^e (\ln x)^4(\ln x)'dx=\left[\frac{1}{5}(\ln x)^5\right]_1^e=\frac{1}{5}$

គ. $C=\int_0^2 \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+6}=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{(x^2+4x+6)'}{x^2+4x+6}dx$

$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+4x+6\right)\right]_0^2=\frac{1}{2}(\ln 18-\ln 6)=\frac{1}{2}\ln 3$ ។

ឃ. $D=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}dx=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2-1=1$ ។

Problem35

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}$ ។

១.ចូរបង្ហាញថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ខាងលើ

អាចសរសេរជារាង $f(x)=\frac{A(e^x+1)}{e^x+x}+\frac{Be^x}{e^x+1}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_0^1 \frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}dx$ ។

Solution

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ៖

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ខាងលើអាចសរសេរជារាង $f(x)=\frac{A(e^x+1)}{e^x+x}+\frac{Be^x}{e^x+1}$ (1)

យើងមាន $f(x)=\frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}$

យើងបាន $f(x)=\frac{1+2e^x-xe^x}{(e^x+1)(e^x+x)}=\frac{(e^{2x}+2e^x+1)-(e^{2x}+xe^x)}{(e^x+1)(e^x+x)}$

$=\frac{\left(e^x+1\right)^2-e^x\left(e^x+x\right)}{(e^x+1)(e^x+x)}=\frac{e^x+1}{e^x+x}-\frac{e^x}{e^x+1}$

$f\left(x\right)=\frac{e^x+1}{e^x+x}-\frac{e^x}{e^x+1}$ (2)

ដោយប្រៀបធៀប $(1)\&(2)$ គេបាន $A=1$, $B=-1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_0^1 \frac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}dx$

យើងមាន $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}-\frac{e^x}{e^x+1}$

យើងបាន $I=\int_0^1\frac{e^x+1}{e^x+x}dx-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$=\left[\ln(e^x+x)\right]_0^1-\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$=\left[\ln(e+1)-\ln(1)\right]-\left[\ln(e+1)-\ln 2\right]=\ln 2$$

ដូចនេះ $I=\ln 2$ ។

Problem36

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x\neq 1$ ដោយ $f(x)=\frac{x^3-2x^2+3x-1}{x-1}$

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b,c,d ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0}f(x).dx$ ។

Solution

១.រកចំនួនពិត a,b,c **និង** d :

ដើម្បីបាន $f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1}$

គេមាន $f(x)=\frac{x^2-2x^2+3x-1}{x-1}\ \forall x\neq 1$

គេអាចសរសេរ $f(x)=\frac{(x^3-1)-(2x^2-2x)+(x-1)+1}{x-1}$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)+(x-1)+1}{x-1}$$

$$=x^2+x+1-2x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$=x^2-x+2+\frac{1}{x-1}$$

ដើម្បីបាន $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-1}$ លុះត្រាតែ $a=1$, $b=-1$,$c=2$, $d=1$ ។

ដូចនេះ $a=1$, $b=-1$,$c=2$, $d=1$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0} f(x).dx$

ដោយ $f(x)=x^2-x+2+\dfrac{1}{x-1}$

គេបាន $I=\int_{-1}^{0}\left(x^2-x+2+\dfrac{1}{x-1}\right).dx=\int_{-1}^{0}x^2.dx-\int_{-1}^{0}x.dx+2\int_{-1}^{0}dx+\int_{-1}^{0}\dfrac{dx}{x-1}$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+2\left[x\right]_{-1}^{0}+\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$=(0+\frac{1}{3})-(0-\frac{1}{2})+2(0+1)+(\ln 1-\ln 2)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2-\ln 2=\frac{17}{6}-\ln 2$$

ដូចនេះ $I=\dfrac{17}{6}-\ln 2$ ។

Problem37

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

ក.កំណត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{2}^{5} f(x).dx$ ។

Solution

ក.កំណត់ចំនួនពិត A និង B

គេបាន $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A.(x+1)+B.(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$1=A.(x+1)+B.(x-1)$$

$$1=Ax+A+Bx-B$$

$$1=(A+B)x+(A-B)$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $A=\frac{1}{2}$ $,B=-\frac{1}{2}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^5 f(x).dx$

ចំពោះ $A=\frac{1}{2}$ $,B=-\frac{1}{2}$ គេបាន $f(x)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$

គេបាន $I=\int_2^5 f(x).dx$

$$=\int_2^5\left[\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right].dx=\frac{1}{2}\int_2^5\frac{1}{x-1}.dx-\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{1}{x+1}.dx$$

$$=\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{(x-1)'}{(x-1)}.dx-\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_2^5-\frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_2^5$$

$$=\frac{1}{2}[\ln 4-\ln 1]-\frac{1}{2}[\ln 6-\ln 3]=\frac{1}{2}\ln 2^2-0-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{3}\right)$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $I=\int_2^5 f(x).dx=\ln\sqrt{2}$ ។

Problem38

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^a\frac{x^n.dx}{x^3+a^3}$, $a>0$

ក. ចូរកំណត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

Solution

ក. កំណត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3+a^3}$, $a>0$

យើងតាង $x = a.t$ នាំឱ្យ $dx = a.dt$

ហើយចំពោះ $x \in [0,a]$ នាំឱ្យ $t \in [0,1]$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(a.t)^n.a.dt}{(at)^3+a^3} = a^{n-2}.\int_0^1 \frac{t^n.dt}{t^3+1}$

ទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង I_n លុះត្រាតែ $n-2=0$ ឬ $n=2$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n=2$ ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $n=2$ គេបាន $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$ តាង $u = x^3+1$ នាំឱ្យ $du = 3x^2.dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,1]$ នាំឱ្យ $u \in [1\ ,\ 2]$

យើងបាន $I_2 = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\left[\ln|u|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2$ ។

ដូចនេះ $I_2 = \frac{1}{3}\ln 2$ ។

Problem39

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{4x^2-x+3}{(x+1)(x^2-x+2)}$ ។

១.កំណត់បីចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = \frac{m}{x+1} + \frac{nx+p}{x^2-x+2}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I = \int_1^3 \frac{4x^2-x+3}{(x+1)(x^2-x+2)}dx$ ។

Solution

១)កំណត់បីចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = \frac{m}{x+1} + \frac{nx+p}{x^2-x+2}$

យើងបាន $\frac{m}{x+1} + \frac{nx+p}{x^2-x+2} = \frac{4x^2-x+3}{(x+1)(x^2-x+2)}$

គេទាញ $m\left(x^2-x+2\right)+(x+1)(nx+p)=4x^2-x+3$

ចំពោះ $x=-1$ គេបាន $4m=8$ នោះ $m=2$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $2m+p=3$ នោះ $p=3-2m=3-4=-1$ ។

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $2m+2n+2p=6$ នោះ $n=3-m-p=3-2+1=2$ ។

ដូចនេះ $m=2$, $n=2$, $p=-1$ ។

២)គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_1^3 \frac{4x^2-x+3}{(x+1)(x^2-x+2)}dx$

ចំពោះ $m=2$, $n=2$, $p=-1$ គេបាន $f\left(x\right)=\frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+2}$

យើងបាន $I=\int_1^3\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right)dx$

$$=\left[2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+2|\right]_1^3$$
$$=\left(2\ln 4+\ln 8\right)-\left(2\ln 2+\ln 2\right)$$
$$=4\ln 2+3\ln 2-2\ln 2-\ln 2=4\ln 2$$

ដូចនេះ $I=4\ln 2$ ។

Problem40

គេមានអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\frac{5x^2-4x+3}{x^3-2x^2+x-2}$ ដែល $x\neq 2$ ។

១.កំណត់ចំនួនពិត A,B និង C ដើម្បីឲ្យ g អាចសរសេរជាទម្រង់ ៖

$g(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ គ្រប់ $x\neq 2$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{1}\frac{5x^2-4x+3}{x^3-2x^2+x-2}\cdot dx$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត A,B និង C

$g(x)=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ និង $g(x)=\frac{5x^2-4x+3}{x^3-2x^2+x-2}$

គេបាន $\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{5x^2-4x+3}{x^3-2x^2+x-2}$

ឬ $A(x^2+1)+(x-2)(Bx+C)=5x^2-4x+3$

បើ $x=2$ នោះ $5A=15$ ឬ $A=3$

បើ $x=i$ នោះ $(i-2)(Bi+C)=-5-4i+3$

$$(-B-2C)+i(C-2B)=-2-4i$$

គេទាញ $\begin{cases}-B-2C=-2\\ C-2B=-4\end{cases}$ នាំឲ្យ $B=2$, $C=0$ ។

ដូចនេះ $A=3$, $B=2$, $C=0$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{1}\frac{5x^2-4x+3}{x^3-2x^2+x-2}\cdot dx$ ។

ចំពោះ $A=3$, $B=2$, $C=0$ គេមាន $\frac{5x^2-4x+3}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2x}{x^2+1}$

គេបាន $I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{x-2}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\left[3\ln|x-2|+\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[3\ln(1)+\ln(2)\right]-\left[3\ln(3)+\ln(2)\right]=-3\ln 3$$

ដូចនេះ $I=-3\ln 3$ ។

Problem41

១.កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យ $\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}+\frac{p}{(x+2)^2}$

ដែល $x\neq -1\,;\,x\neq -2$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{1}\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត m,n **និង** p

គេមាន $\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}+\frac{p}{(x+2)^2}$

$$\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{m(x+2)^2+n(x+1)(x+2)+p(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$x^2+11x+12=m(x+2)^2+n(x+1)(x+2)+p(x+1)$$

$$x^2+11x+12=m(x^2+4x+4)+n(x^2+3x+2)+p(x+1)$$

$$x^2+11x+12=(m+n)x^2+(4m+3n+p)x+(4m+2n+p)$$

គេទាញ $\begin{cases} m+n=1 & (1) \\ 4m+3n+p=11 & (2) \\ 4m+2n+p=12 & (3) \end{cases}$

យកសមីការ (2) ដកសមីការ (3) គេបាន $n=-1$ ហើយតាម (1) គេបាន $m=2$

យក $m=2$, $n=-1$ ជួសក្នុង (3) គេបាន $8-2+p=12$ ឬ $p=6$ ។

ដូចនេះ $m=2$, $n=-1$, $p=6$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx$

ចំពោះ $m=2$, $n=-1$, $p=6$ នោះ $\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{6}{(x+2)^2}$

ហើយ $I=\int_0^1 \frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx=\int_0^1\left[\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{6}{(x+2)^2}\right].dx$

$$I=\left[2\ln|x+1|-\ln|x+2|-\frac{6}{x+2}\right]_0^1=\left(2\ln2-\ln3-2\right)-(-\ln2-3)=1+\ln\frac{8}{3}$$

ដូចនេះ $I=\int_0^1 \frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx=1+\ln\frac{8}{3}$ ។

Problem42

គណនាអាំងតេក្រាល

$I=\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx$ និង $J=\int_1^4 (2x+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{8}{x^2})dx$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I=\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx=\left[x^3+x^2+x\right]_1^2$$

$$=\left(8+4+2\right)-\left(1+1+1\right)=11$$

ដូចនេះ $I=11$ ។

$$J=\int_1^4 (2x+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{8}{x^2})\,dx=\left[x^2+2\sqrt{x}+\frac{8}{x}\right]_1^4$$
$$=(16+4+2)-(1+2+8)=11$$

ដូចនេះ: $J=11$ ។

Problem43

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx \quad \text{និង} \quad J=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+2x+1\right)dx$$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

យើងបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$

$$=2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2(1-0)-\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=2-\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ: $I=\frac{8-\pi}{4}$ ។

យើងបាន $J=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+2x+1\right)dx=\int_1^2\frac{dx}{x}-2\int_1^2\frac{dx}{x^2}+\int_1^2(2x+1)dx$

$$J=\left[\ln x\right]_1^2+2\left[\frac{1}{x}\right]_1^2+\left[x^2+x\right]_1^2=\ln 2-\ln 1+2\left(\frac{1}{2}-1\right)+(4+2)-(1+1)$$

ដូចនេះ: $J=3+\ln 2$ ។

Problem44

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx$

$$J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x+\cos x\right)^2 dx \quad \text{និង} \quad K=\int_1^3\frac{2x^2+5x+4}{x+1}dx$$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_1^2 (3x^2+2x+1)dx=\left[x^3+x^2+x\right]_1^2=(8+4+2)-(3)=11$$

ដូចនេះ: $I=11$ ។

$$J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{12}$$

ដូចនេះ $J=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{12}$ ។

និង $K=\int_1^3\frac{2x^2+5x+4}{x+1}dx$ ដោយ $2x^2+5x+4=(x+1)(2x+3)+1$

គេបាន $K=\int_1^3\left(2x+3+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x^2+3x+\ln|x+1|\right]_1^3$

$$=(9+9+\ln 4)-(1+3+\ln 2)=14+\ln 2$$

ដូចនេះ $K=14+\ln 2$ ។

Problem45

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(5-2\sin^2 x)dx\ ,\quad J=\int_1^2\left(5x^2-3\right)^2dx \text{ និង } K=\int_1^3\frac{4x^2+3x}{x+1}dx \text{ ។}$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(5-2\sin^2 x)dx$ ដោយ $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

នោះ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4+\cos 2x)\,dx=\left[4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi+\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $I=\frac{1}{2}+\pi$ ។

$$J=\int_1^2\left(5x^2-3\right)^2dx=\int_1^2\left(25x^4-30x^2+9\right)dx$$

$$=\left[5x^5-10x^3+9x\right]_1^2=\left(160-80+18\right)-\left(5-10+9\right)=94$$

ដូចនេះ $J=94$ ។

$$K=\int_1^3\frac{4x^2+3x}{x+1}dx=\int_1^3\frac{(4x-1)(x+1)+1}{x+1}dx=\int_1^3\left(4x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[2x^2-x+\ln|x+1|\right]_1^3=\left(18-3+\ln 4\right)-\left(2-1+\ln 2\right)$$

$$=15+\ln 4-1-\ln 2=14+\ln 2$$

ដូចនេះ $K=14+\ln 2$ ។

Problem46

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{\sqrt{e}}^{e^2}\ln x\,dx$ និង $J=\int_1^{10}x(3x-2)\,dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$I=\int_{\sqrt{e}}^{e^2}\ln x\,dx$ តាង $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=dx\end{cases}$ នោះ $\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=x\end{cases}$

$$I=\left[x\ln x\right]_{\sqrt{e}}^{e^2}-\int_{\sqrt{e}}^{e2}dx=\left[2e^2-\frac{\sqrt{e}}{2}\right]-\left(e^2-\sqrt{e}\right)=e^2+\frac{\sqrt{e}}{2}$$ ។

$$J=\int_1^{10}x(3x-2)\,dx=\int_1^{10}\left(3x^2-2x\right)dx=\left[x^3-x^2\right]_1^{10}$$

$$=(1000-100)-(1-1)=900$$

Problem47

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$I=\int_{-1}^{3}(3x^2+2x-5)\,dx$ និង $K=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-e^x+1)\,dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$I=\int_{-1}^{3}(3x^2+2x-5)\,dx=\left[x^3+x^2-5x\right]_{-1}^{3}$$

$$=(27+9-15)-(-1+1+5)=16\text{ ។}$$

ដូចនេះ $I=16$ ។

$$K=\int_{0}^{\ln 2}(e^{2x}-e^x+1)\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x\right]_{0}^{\ln 2}$$

$$=(2-2+\ln 2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}+\ln 2\text{ ។}$$

ដូចនេះ $K=\frac{1}{2}+\ln 2$ ។

Problem48

១.កំណត់បីចំនួនពិត a,b និង c ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{8x^2-12x+7}{(2x-3)(x^2-x+1)}=\frac{a}{2x-3}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$ គ្រប់ចំនួនពិត $x\neq\frac{3}{2}$ ។

២.គណនា $I=\int_{2}^{5}\frac{8x^2-8x+7}{(2x-3)(x^2-x+1)}dx$ ។

Solution

១.កំណត់បីចំនួនពិត a,b និង c ៖

$$\frac{8x^2-12x+7}{(2x-3)(x^2-x+1)}=\frac{a}{2x-3}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

តម្រូវភាគបែងរួម $(2x-3)(x^2-x+1)$ រួចលុបចោលគេបាន ៖

$$8x^2-12x+7=a\left(x^2-x+1\right)+(bx+c)(2x-3)$$

$$8x^2-12x+7=ax^2-ax+a+2bx^2-3bx+2cx-3c$$

$$8x^2-12x+7=(a+2b)x^2+(-a-3b+2c)x+(a-3c)$$

ដោយផ្ទឹមលេខមេគុណគេបាន $\begin{cases}a+2b=8\\-a-3b+2c=-12\\a-3c=7\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $a=4$, $b=2$, $c=-1$ ។

២.គណនា $I=\int_{2}^{5}\frac{8x^2-12x+7}{(2x-3)(x^2-x+1)}dx$ ៖

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=4$, $b=2$, $c=-1$ គេមាន ៖

$$\frac{8x^2-12x+7}{(2x-3)(x^2-x+1)}=\frac{4}{2x-3}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

គេបាន $I=\int_2^5\left(\frac{4}{2x-3}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx$

$$=\left[2\ln|2x-3|+\ln(x^2-x+1)\right]_2^5$$

$$=\left(2\ln 7+\ln 21\right)-\left(2\ln 1+\ln 3\right)$$

$$=2\ln 7+\ln 3+\ln 7-0-\ln 3=3\ln 7$$

ដូចនេះ $I=3\ln 7$ ។

Problem49

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{2-x}{e^x-x+1}$ ។

$a)$ ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=A+\dfrac{B(e^x-1)}{e^x-x+1}$ ។

$b)$ គណនា $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ ។

Solution

$a)$ **កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B**

យើងមាន $f(x)=\dfrac{2-x}{e^x-x+1}$ (1) និង $f(x)=A+\dfrac{B(e^x-1)}{e^x-x+1}$ (2)

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{2-x}{e^x-x+1}=A+\dfrac{B(e^x-1)}{e^x-x+1}$

សមមូល $2-x=A(e^x-x+1)+B(e^x-1)$

សមមូល $2-x=(A+B)e^x-Ax+(A-B)$

គេទាញ $\begin{cases}A+B=0\\-A=-1\\A-B=2\end{cases}$ សមមូល $A=1$, $B=-1$ ។

ដូចនេះ $A=1$, $B=-1$ ។

$b)$ គណនា $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

ចំពោះ $A=1$, $B=-1$ គេបាន $f(x)=1-\dfrac{e^x-1}{e^x-x+1}$

យើងបាន $I=\int_0^1\left(1-\dfrac{e^x-1}{e^x-x+1}\right)dx=\left[x-\ln\left(e^x-x+1\right)\right]_0^1$

$=\left[1-\ln e\right]-\left[0-\ln 2\right]=\ln 2$ ។

ដូចនេះ $I=\ln 2$ ។

Problem50

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x-1}{x(1+x\ln x)}$ ។

$a)$ កំណត់ពីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B(1+\ln x)}{1+x\ln x}$ ។

$b)$ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^e f(x)\,dx$ ។

Solution

$a)$ **កំណត់ពីចំនួនពិត A និង B**

មាន $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B(1+\ln x)}{1+x\ln x}$ (1) និង $f(x)=\dfrac{x-1}{x(1+x\ln x)}$ (2)

ផ្ទឹម $(1)\&(2)$ គេបាន $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B(1+\ln x)}{1+x\ln x}=\dfrac{x-1}{x(1+x\ln x)}$

សមមូល $A(1+x\ln x)+Bx(1+\ln x)=x-1$

សមមូល $A+Bx+(A+B)x\ln x=x-1$

គេទាញ $\begin{cases}A=-1\\ B=1\\ A+B=0\end{cases}$ សមមូល $A=-1$, $B=1$ ។

ដូចនេះ $A=-1$, $B=1$ ។

$b)$ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^e f(x)\,dx$ ៖

ចំពោះ $A=-1$, $B=1$ គេបាន $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

យើងបាន $I=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left[-\frac{`1}{x}+\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right]dx=\left[-\ln x+\ln\left|1+x\ln x\right|\right]_1^e$

$$=\left(-\ln e+\ln(1+e\ln e)\right)-\left(-\ln 1+\ln|1+\ln 1|\right)$$

$$=-1+\ln(1+e)=\ln(1+e)-\ln e=\ln(\frac{1+e}{e})$$

ដូចនេះ $I=\int_1^e f(x)\,dx=\ln(\frac{1+e}{e})$ ។

Problem51

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x(1+\ln x)^2}$ ។

$a)$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f អាចសរសេរជារាង ៖

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+\ln x)}+\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$$ ។

$b)$ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^e f(x)\,dx$ ។

Solution

$a)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+\ln x)}+\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$

យើងមាន $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x(1+\ln x)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ដោយ $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+\ln x)}+\frac{1}{x(1+\ln x)^2}=\frac{(1+\ln x)^2-2(1+\ln x)+1}{x(1+\ln x)^2}$

$$=\frac{1+2\ln x+\ln^2 x-2-2\ln x+1}{x(1+\ln x)^2}=\frac{\ln^2 x}{x(1+\ln x)^2}$$ ពិត។

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+\ln x)}+\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$ ។

$b)$ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^e f(x)\,dx$

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+\ln x)}+\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$ (សម្រាយខាងលើ)

យើងបាន $I=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(1+\ln x)}+\frac{1}{x(1+\ln x)^2}\right]dx$

$$=\int_1^e\frac{dx}{x}-2\int_1^e\frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}dx+\int_1^e\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}\,dx$$

$$=\left[\ln x\right]_1^e-2\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^e+\left[-\frac{1}{1+\ln x}\right]_1^e$$

$$=(\ln e-\ln 1)-2(\ln 2-\ln 1)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=1-2\ln 2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

ដូចនេះ: $I=\frac{3}{2}-\ln 2$ ។

Problem52

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{\ln x-1}{x(x-\ln x)}$ ។

$a)$ គ្រប់ $x>0$ ចូរបង្ហាញថា $f(x)=\frac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}-\frac{1}{x}$ ។

$b)$ ទាញរកតម្លៃ $I=\int_1^e f(x)\,dx$ ។

Solution

$a)$ បង្ហាញថា $f(x)=\frac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}-\frac{1}{x}$

យើងមាន $f(x)=\frac{\ln x-1}{x(x-\ln x)}$ គ្រប់ $x>0$

ដោយ $f(x)=\frac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x(x-\ln x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-1-(x-\ln x)}{x(x-\ln x)}$

$$=\frac{x-1-x+\ln x}{x(\ln x-x)}=\frac{\ln x-1}{x(\ln x-x)}$$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}-\dfrac{1}{x}$ ។

$b)$ ទាញរកតម្លៃ $I=\int_1^e f(x)\,dx$ ៖

យើងមាន $f(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}-\dfrac{1}{x}$ គ្រប់ $x>0$

យើងបាន $I=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x-\ln x}-\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^e\dfrac{(x-\ln x)'}{x-\ln x}dx-\int_1^e\dfrac{dx}{x}$

$$=\left[\ln|x-\ln x|\right]_1^e-\left[\ln x\right]_1^e=\left(\ln(e-1)-\ln(1-0)\right)-\left(\ln e-0\right)$$

$$=\ln(e-1)-\ln e=\ln(\frac{e-1}{e})$$

ដូចនេះ $I=\ln(\dfrac{e-1}{e})$ ។

Problem53

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x-x}$ ។

$a)$ កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=A+\dfrac{B(e^x-1)}{e^x-x}$ ។

$b)$ គណនា $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ ។

Solution

$a)$ កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B

មាន $f(x)=A+\dfrac{B(e^x-1)}{e^x-x}$ (1) និង $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x-x}$ (2)

ផ្ទឹម $(1)\&(2)$ យើងបាន $A+\dfrac{B(e^x-1)}{e^x-x}=\dfrac{x-1}{e^x-x}$

សមមូល $A(e^x - x) + B(e^x - 1) = x - 1$

សមមូល $(A+B)e^x - Ax - B = x - 1$ នោះគេទាញ $\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \\ -B=-1 \end{cases}$ ឬ $A=-1, B=1$

ដូចនេះ $A=-1, B=1$ ។

$b)$ **គណនា** $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

ចំពោះ $A=-1, B=1$ គេមាន $f(x) = -1 + \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

យើងបាន $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{e^x-1}{e^x-x}\right)dx = -\int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{(e^x-x)'}{(e^x-x)}\,dx$

$$= -\left[x\right]_0^1 + \left[\ln\left(e^x - x\right)\right]_0^1 = -1 + \ln(e-1) - \ln 1$$

$$= \ln(e-1) - \ln e = \ln(\frac{e-1}{e})$$

ដូច្នេះ $I = \ln(\frac{e-1}{e})$ ។

Problem54

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\sin x}$ ដែល $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ។

$a)$ ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $f(x) = A\cos x + \frac{B\cos x}{1+\sin x}$ ។

$b)$ គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$ ។

Solution

$a)$ **កំណត់ពីរចំនួនពិត** A **និង** B

គេមាន $f(x) = A\cos x + \frac{B\cos x}{1+\sin x}$ (1) និង $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\sin x}$ (2)

ផ្ទឹម $(1)\&(2)$ គេបាន $A\cos x + \frac{B\cos x}{1+\sin x} = \frac{\sin 2x}{1+\sin x}$

សមមូល $A\cos x(1+\sin x) + B\cos x = \sin 2x$

$$A\cos x + A\sin x\cos x + B\cos x = 2\sin x\cos x$$

$$(A+B)\cos x + A\sin x\cos x = 2\sin x\cos x$$

សមភាពចុងក្រោយនេះពិតគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ លុះត្រាតែ $\begin{cases}A=2\\A+B=0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}A=2\\B=-2\end{cases}$ ។ ដូចនេះ $A=2\ ,\ B=-2$ ។

$b)$ គណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$ ៖

ចំពោះ $A=2\ ,\ B=-2$ គេមាន $f(x)=2\cos x-\dfrac{2\cos x}{1+\sin x}$

គេបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(2\cos x-\dfrac{2\cos x}{1+\sin x}\right)dx$

$$=\left[2\sin x-2\ln|1+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\left[2(\frac{1}{2})-2\ln(1+\frac{1}{2})\right]-\left[2(0)-2\ln(1+0)\right]=1-2\ln\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=1-2\ln\frac{3}{2}$ ។

Problem55

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\dfrac{\cos(\ln x)+\sin(\ln x)}{1+x\sin(\ln x)}\cdot dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\dfrac{\cos(\ln x)+\sin(\ln x)}{1+x\sin(\ln x)}\cdot dx$

តាង $u=1+x\sin(\ln x)$ នោះ $du=\left[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right]dx$

បើ $x=1$ នោះ $u=1$ និង $x=e^{\frac{\pi}{2}}$ នោះ $x=1+e^{\frac{\pi}{2}}$

គេបាន $I=\int_1^{1+e^{\frac{\pi}{2}}}\dfrac{du}{u}=\left[\ln u\right]_1^{1+e^{\frac{\pi}{2}}}=\ln(1+e^{\frac{\pi}{2}})-\ln(1)=\ln(1+e^{\frac{\pi}{2}})$

ដូចនេះ $I=\ln(1+e^{\frac{\pi}{2}})$ ។

Problem56

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx$$

គេមាន $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

យើងបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)dx=\left[\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{16}$

ដូចនេះ $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)dx=\frac{3\pi+2}{32}$ ។

Problem57

ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$I=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $I=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$

$$=\int_1^2 \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx=\int_1^2\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 dx-2\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int_1^2\frac{dx}{x}$$

$$=\left[x\right]_1^2-4\left[\sqrt{x}\right]_1^2+\left[\ln|x|\right]_1^2=(2-1)-4(\sqrt{2}-1)+\ln(2)-\ln(1)$$

$$=1-4\sqrt{2}+4+\ln 2=5-4\sqrt{2}+\ln 2$$

ដូចនេះ $\int_1^2\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=3-4\sqrt{2}+\ln 2$ ។

ខ. $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$

ដោយ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ និង $1+\cos 2x=2\cos^2 x$

គេបាន $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x dx=\left[2\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sin\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{6}=2-2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

ដូចនេះ $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=1$ ។

Problem58

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\frac{2e^x+1}{2e^x+x-1}dx$ និង $J=\int_0^1\frac{x-2}{2e^x+x-1}$

ក.ចូរគណនា $I+J$ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J ។

Solution

ក.គណនា $I+J$

យើងមាន $I=\int_0^1\frac{2e^x+1}{2e^x+x-1}dx$ និង $J=\int_0^1\frac{x-2}{2e^x+x-1}$

យើងបាន $I+J=\int_0^1\frac{2e^x+1}{2e^x+x-1}dx+\int_0^1\frac{x-2}{2e^x+x-1}dx$

$$=\int_0^1 \frac{2e^x+1+x-2}{2e^x+x-1}dx=\int_0^1 \frac{2e^x+x-1}{2e^x+x-1}dx$$

$$=\int_0^1 dx=\left[x\right]_0^1=1-0=1$$

ដូចនេះ $I+J=1$ ។

ខ.គណនា I រួចទាញរក J

យើងមាន $I=\int_0^1 \frac{2e^x+1}{2e^x+x-1}dx=\int_0^1 \frac{(2e^x+x-1)'}{2e^x+x-1}dx=\left[\ln|2\mathrm{e}^x+x-1|\right]_0^1$

$$=\ln(2\mathrm{e})-\ln(1)=\ln(2\mathrm{e})=1+\ln 2$$

ហើយតាម $I+J=1$ នោះ $J=1-I=1-(1+\ln 2)=-\ln 2$ ។

ដូចនេះ $I=1+\ln 2$ និង $J=-\ln 2$ ។

Problem59

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+2x+2}\,dx \quad \text{និង} \quad J=\int_0^{\pi} x\cos^4 x\sin^5 x\,dx$$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល ៖

យើងមាន $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+2x+2}\,dx$

$$=\int_0^1 \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)}dx=1-\left[\ln(x^2+2x+2)\right]_0^1=1-\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

ដូចនេះ $I=1-\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ ។

$$J=\int_0^{\pi} x\cos^4 x\sin^5 x\,dx$$

តាង $u=\pi-x$ នោះ $du=-dx$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $u=\pi$ ហើយ $x=\pi$ នោះ $u=0$

គេបាន $J=\int_{\pi}^{0}(\pi-u)\cos^4(\pi-u)\sin^5(\pi-u)(-du)$

$=\int_{0}^{\pi}(\pi-u)\cos^4 u\sin^5 udx$

$=\int_{0}^{\pi}\pi\cos^4 u\sin^5 udu-\int_{0}^{\pi}u\cos^4 u\sin^5 udu$

$=\pi\int_{0}^{\pi}\cos^4 u\sin^5 udu-J$

គេទាញ $J=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\cos^4 u(1-\cos^2 u)^2\sin u\,du$

តាង $z=\cos u$ នោះ $dz=-\sin udu$

ចំពោះ $u\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $J=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}z^4(1-z^2)^2(-dz)=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(z^4-2z^6+z^8\right)dz$

$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{z^5}{5}-\frac{2z^7}{7}+\frac{z^9}{9}\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{7}-\frac{1}{9}\right)\right]=\frac{\pi}{315}$

ដូចនេះ $J=\frac{\pi}{315}$ ។

Problem60

១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$ ។

Solution

១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេបាន $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x(1+\sin x)+b\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x(a+a\sin x+b-b\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x[(a+b)+(a-b)\sin x]}{\cos^2 x}=\frac{(a+b)+(a-b).\sin x}{\cos x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases}a+b=1\\ a-b=0\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$ ។ ដូចនេះ $a=\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{2}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

តាមសំរាយខាងលើ ចំពោះ $a=\frac{1}{2}$ និង $b=\frac{1}{2}$ គេមាន ៖

$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}\right].dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}.dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\sin x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\frac{(1-\sin x)'}{(1-\sin x)}.dx\right]+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)}.dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]+\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]$$

$$=\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

Problem61

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

Solution

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

គេមាន $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

តាង $f(x)=\frac{1}{8x^2+6x+1}=\frac{1}{(2x+1)(4x+1)}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច $f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}$

គេបាន $\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}=\frac{1}{8x^2+6x+1}$

នាំឲ្យ $a(4x+1)+b(2x+1)=1$

ឬ $(4a+2b)x+(a+b)=1$

គេទាញ $\begin{cases}4a+2b=0\\ a+b=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ ,\ b=2$

គេបាន $f(x)=-\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{4x+1}$

$$I_n=\int_0^n f(x).dx=\int_0^n\left(\frac{2}{4x+1}-\frac{1}{2x+1}\right).dx$$

$$=\int_0^n \frac{2dx}{4x+1}-\int_0^n \frac{dx}{2x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|4x+1|\Big]_0^n-\frac{1}{2}\Big[\ln|2x+1|\Big]_0^n$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4n+1)-\frac{1}{2}\ln(2n+1)=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$$

ដូចនេះ: $I_n=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$ ។

និង $\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}=\ln\sqrt{2}$ ។

Problem62

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) នៃចំនួនពិតកំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។

ក.កំណត់ចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឲ្យបាន៖

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$ ។

ខ.តាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ។គណនា $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

គ.ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេតាង $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$ ដែល g ជាអនុគមន៍

កំណត់ដោយ $g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ និង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ ។

បង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n និង $\lim_{n \to +\infty} S'_n$ ។

Solution

ក.កំណត់ចំនួនពិត A, B, C

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

យើងបាន $1 = A(n+1)(n+2) + B(n+2)n + C(n+1)n$

សមមូល $1 = (A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + 2A$

គេទាញ $\begin{cases} 2A = 1 \\ A+B+C = 0 \\ 3A+2B+C = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ ។

ខ.គណនា $\lim_{n \to +\infty} S_n$

មាន $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$ ។

គ.បង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ទាញរក S'_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ យើងមាន $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$

ដែល $g(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ និង $S'_n = V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n$

យើងបាន $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(V_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[u_n-\int_n^{n+1} g(x).dx\right]$

$$=\sum_{k=1}^{n}(u_n)-\left[\int_1^2 g(x).dx+\int_2^3 g(x).dx+\ldots+\int_n^{n+1} g(x).dx\right]$$

ដូចនេះ $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $g(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ មានលំនាំដូច $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

គេបាន $g(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}$

ដោយ $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$ យើងបាន

$$S'_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}-\int_1^{n+1}\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}\right].dx$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{n+2-n-1}{2(n+1)(n+2)}-\left[\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{1}{2}\ln(n+1)+\ln(n+2)-\frac{1}{2}\ln(n+3)+\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2$$

$$=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$$

ដូចនេះ $S'_n=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$ ។

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

Problem63

គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

ក.ចូរស្រាយថា $I_n = J_n$ ។

ខ. គណនា I_n និង J_n ។

Solution

ក.ស្រាយថា $I_n = J_n$

មាន $$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

ចំពោះ $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$ តាង $x = \frac{\pi}{2} - t$ នោះ $dx = -dt$

បើ $x = \frac{\pi}{6}$ នោះ $t = \frac{\pi}{3}$ និង $x = \frac{\pi}{3}$ នោះ $t = \frac{\pi}{6}$

គេបាន $$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin^n(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^n(\frac{\pi}{2} - t)}.(-dt) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}.dt = J_n$$

ដូចនេះ $I_n = J_n$ ។

ខ. គណនា I_n និង J_n

គេបាន $$I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

$$I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{តែ} \quad I_n = J_n$$

នោះ $2I_n = 2J_n = \frac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $I_n = J_n = \frac{\pi}{12}$ ។ ដូចនេះ $I_n = \frac{\pi}{12}$ និង $J_n = \frac{\pi}{12}$ ។

Problem64

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}.dx$, $n \in \mathbb{N}$ ។

ក.គណនា $I_0 + I_1$, I_1 រួចទាញរក I_0 ។

ខ.គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

Solution

ក.គណនា $I_0 + I_1$, I_1 រួចទាញរក I_0

យើងមាន $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}$

យើងបាន $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 dx = 1$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)}.dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$$

ដោយ $I_0 + I_1 = 1$ នាំឱ្យ $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln(\frac{e+1}{2})$ ។

ដូចនេះ $I_0 + I_1 = 1$, $I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$, $I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ ។

ខ.គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{e^x+1}.dx$$

$$= \int_0^1 e^{nx}.dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}$ ។

Problem65

គេឲ្យ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។

ក.រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n+1) = f(n)$ ។

គ.គណនា $f(n)$ ។

Solution

ក.រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2}

គេមាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ នោះ $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x.\sin x dx$

តាង $\begin{cases} u = \sin^{n+1} x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1)\cos x \sin^n x.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+2} = \left[-\sin^{n+1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x.dx$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x.dx$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x.dx$$

$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ នាំឲ្យ $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ ។

ខ.បញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n+1) = f(n)$

គេមាន $f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1}$ នោះ $f(n+1) = (n+2)I_{n+1}.I_{n+2}$

តែ $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ នោះ $f(n+1) = (n+2).I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_n I_{n+1}$

ដូចនេះ $f(n+1) = f(n)$ ។

គ.គណនា $f(n)$ ៖

ដោយ $f(n+1) = f(n)$ នោះ $f(n)$ ជាអនុគមន៍ថេរ ។

គេបាន $f(n)=f(0)=I_0.I_1$ ដោយ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ និង $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.dx=1$

ដូចនេះ $f(n)=\frac{\pi}{2}$ ។

Problem66

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

សមីការ $f(x+1)+x^2f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 f(x).dx$ ។

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 f(x).dx$

បើគេតាង- $x=t+1$ នោះ $dx=dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=\int_0^1 f(t+1).dt \quad (1)$

បើគេតាង $x=t^3+1$ នោះ $dx=3t^2dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=3\int_0^1 t^2f(t+1).dt$ ឬ $\frac{1}{3}I=\int_0^1 t^2f(t^3+1).dt \quad (2)$

បូកសមីការ $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន $I+\frac{1}{3}I=\int_0^1[f(t+1)+t^2f(t^3+1)].dt$

ដោយ $f(x+1)+x^2f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

គេបាន $\frac{4}{3}I=\int_0^1(t^3+\sqrt[3]{t}).dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=1$

ដូចនេះ $I=\frac{3}{4}$ ។

Problem67

គេសន្មតថា f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$ ។ ចូរគណនា $I=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$ ។

Solution

គណនា $I=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

យើងមាន $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$

ចំពោះ $x\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ នាំឱ្យ $t\in\left[\frac{\pi}{3},0\right]$

គេបាន $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} f(-t).(-dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-t).dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx$

គេទាញ $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left[f(-x)+f(x)\right]dx$

ដោយ $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}=\sqrt{4\sin^2 x}=2|\sin x|$

គេបាន $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2|\sin x|.dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x.dx=2\left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=2\left(-\frac{1}{2}+1\right)=1$

ដូចនេះ $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=1$ ។

Problem68

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

Solution

បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$ និង ចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)]dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z = \cos x$ នាំឱ្យ $dz = -\sin x.dx$ ហើយចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នោះ $z \in [1,-1]$

គេបាន $I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$ ។

Problem69

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $\left[-a,a\right]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{1+3^x}.dx$

Solution

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}$ (1)

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x\in\left[-a,0\right]$ នាំឱ្យ $t\in\left[a,0\right]$

គេបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_a^0\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_0^a\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_0^a\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\ \forall x\in\left[-a,a\right]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx$ (2)

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{1+3^x}.dx$

ដោយ $f(x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន៖

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos 2x}.dx=2\int_0^{\pi}|\cos x|.dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x.dx=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})=4$$ ។ ដូចនេះ $I=4$ ។

Problem70

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

Solution

បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $t = a+b-x \Rightarrow dt = -dx$ បើ $x = a \Rightarrow t = b$ និង $x = b \Rightarrow t = a$

យើងបាន $\int_a^b f(x).dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = -\int_b^a f(a+b-t).dt = \int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងអាចសរសេរ៖

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\ln 4 - \ln(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I = \ln 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx = \frac{2\pi}{3}\ln 2 - I$$

$2I = \frac{2\pi}{3}\ln 2$ នាំឱ្យ $I = \frac{\pi}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx = \frac{\pi}{3}\ln 2$ ។

Problem71

គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}+\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}}+\ldots+\frac{2x+n}{\sqrt{x^2+nx}}-\frac{2nx}{\sqrt{x^2+1}}\right).dx$$ ដែល $\alpha>0$ ។

ក.គណនា $I(\alpha)$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$ ។

Solution

ក.គណនា $I(\alpha)$ ៖

គេអាចសរសេរ $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2x+k}{\sqrt{x^2+kx}}-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right).dx$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\alpha}\left(\frac{2x+k}{\sqrt{x^2+kx}}-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right).dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[2\sqrt{x^2+kx}-2\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\alpha}$$

ដូចនេះ $I(\alpha)=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\alpha^2+k\alpha}-\sqrt{\alpha^2+1}+1]$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$ ៖

គេមាន $I(\alpha)=2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\alpha^2+k\alpha}-\sqrt{\alpha^2+1}+1]$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2+k\alpha}+\sqrt{\alpha^2+1}}+1\right]$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k-1/\alpha}{\sqrt{1+k/\alpha}+\sqrt{1+1/\alpha^2}}+1\right]$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)=2\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{2}+1)=\frac{n(n+5)}{2}$ ។

Problem72

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

ក.រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ។

ខ.គណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}$ ។

គ.គណនា I_0 រួចទាញរក I_n ។

Solution

ក.រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1}

មាន $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$

តាង $\begin{cases}u=x^n\\ dv=\sqrt{1-x}.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=nx^{n-1}.dx\\ v=\int\sqrt{1-x}dx=-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\end{cases}$

$$I_n=\left[-\frac{2x^n}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1+\frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$$

$$I_n=\frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}.dx-\frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$$

$$I_n=\frac{2n}{3}I_{n-1}-\frac{2n}{3}I_n$$

$$(1+\frac{2n}{3})I_n=\frac{2n}{3}I_{n-1}$$

ដូចនេះ $I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

ខ.គណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$

នោះ $\frac{I_{n-1}}{I_n}=\frac{2n+3}{2n}=1+\frac{3}{2n}$

គេបាន $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n})=1$ ។ ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}=1$ ។

គ.គណនា I_0 រួចទាញរក I_n

បើ $n=0$ នោះ $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}.dx$ តាង $\sqrt{1-x}=t$ នាំឲ្យ $x=1-t^2$

នោះ $dx=-t.dt$ ។ បើ $x=0$ នោះ $t=1$ និង $x=1$ នោះ $t=0$

គេបាន $I_0=\int_1^0 t.(-2tdt)=\int_0^1 2t^2.dx=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_0=\frac{2}{3}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ នោះ $\frac{I_n}{I_{n-1}}=\frac{2n}{2n+3}$

បើ $n=1$ នោះ $\frac{I_1}{I_0}=\frac{2}{5}$

បើ $n=2$ នោះ $\frac{I_2}{I_1}=\frac{4}{7}$

បើ $n=n$ នោះ $\frac{I_{n-1}}{I_n}=\frac{2n}{2n+3}$

គុណអង្គនិងអង្គគេបាន $\frac{I_n}{I_0}=\frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}$ ដោយ $I_0=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_n=\frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}\times\frac{2}{3}$ ។

Problem73

គេឲ្យ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.dx\ ,\ n\in\mathbb{N}$

ក.រកទំនាក់ទំនង I_n និង I_{n-2} ដែលមាន n ។

ខ.គេសន្មត $I_{2p}=\frac{1\times3\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times.....\times(2p)}\times\frac{\pi}{2}$ និង $I_{2p+1}=\frac{2\times4\times6\times.....\times2p}{1\times3\times5\times.....\times(2p+1)}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}\le\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}\le1$ ។

ទាញរកឲ្យបានថា $\lim_{p\to+\infty}\frac{(2\times4\times6\times....\times2p)^2}{[1\times3\times5\times....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1}$ ។

Solution

ក.រកទំនាក់ទំនង I_n និង I_{n-2} ដែលមាន n ៖

មាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x.\cos x.dx$, $n \in \mathbb{N}$

តាង $\begin{cases} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -(n-1)\sin x \cos^{n-2} x.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_n = \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x.dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}$$

ដូចនេះ $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ខ.បង្ហាញថា $\dfrac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$

គ្រប់ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ និង $p \in \mathbb{N}$ គេមាន $\cos^{2p+2} x \le \cos^{2p+1} x \le \cos^{2p} x$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+2} x.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} x.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x.dx$

ឬ $I_{2p+2} \le I_{2p+1} \le I_{2p}$ នាំឲ្យ $\dfrac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$ ។

ទាញរក $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{(2\times4\times6\times\dots\times2p)^2}{[1\times3\times5\times\dots\times(2p-1)]^2} \times \dfrac{1}{2p+1}$ ៖

គេមាន $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ នោះ $I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p} I_{2p}$ ឬ $\dfrac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \dfrac{2p+1}{2p}$

ដោយ $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$ នោះ $\frac{2p+1}{2p} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$

ដោយ $\lim_{p\to+\infty} \frac{2p+1}{2p} = 1$ គេទាញ $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ ។

មាន $I_{2p} = \frac{1\times 3\times \dots \times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times \dots \times(2p)} \times \frac{\pi}{2}$ និង $I_{2p+1} = \frac{2\times 4\times 6\times \dots \times 2p}{1\times 3\times 5\times \dots \times(2p+1)}$

គេបាន $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{(2\times 4\times 6\times \dots \times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times \dots \times(2p-1)]^2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{2}{\pi}$

គេទាញ $\frac{(2\times 4\times 6\times \dots \times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times \dots \times(2p-1)]^2} \times \frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\lim_{p\to+\infty} \frac{(2\times 4\times 6\times \dots \times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times \dots \times(2p-1)]^2} \times \frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2}$ ។

Problem74

គេមានអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ ដែល $n = 0,1,2,\dots$

ក.ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} (nI_n)$ ។

Solution

ក.ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនិងគណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}.dx$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in IN$ គេមាន $x^n \ge x^{n+1}$

នាំឲ្យ $\frac{x^n}{x^2+x+1} \ge \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}$ នោះ $I_n \ge I_{n+1}$ ។ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គេបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{x^2+x+1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x+x^2)}{x^2+x+1}.dx = \int_0^1 x^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ៖

គេមាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ (1)

គេបាន $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$ (2) គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ គេមាន

$I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n \le I_{n-1} \le I_{n-2}$

នាំឲ្យ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$ (3)

តាម (1), (2) និង (3) គេទាញបាន $\dfrac{1}{n+1} \le 3I_n \le \dfrac{1}{n-1}$

នាំឲ្យ $\dfrac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \dfrac{n}{3(n-1)}$ ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3(n-1)} = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n) = \dfrac{1}{3}$ ។

Problem75

លើអង្កត់ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ដែលត្រូវនឹងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \in \mathbb{N}$ គេកំណត់អនុគមន៍

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(nx)}{\sin x} & \text{បើ } x > 0 \\ n & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ក.ស្រាយថា $f_n(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើ អង្កត់ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ។

ខ.តាង $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x).dx$ ។ រកទំនាក់ទំនងរវាង I_{2n+1} និង I_{2n-1} ។

Solution

ក.ស្រាយថា $f_n(x)$ **មានអាំងតេក្រាលលើ អង្កត់** $[0,\frac{\pi}{2}]$ ៖

គេមាន $\lim\limits_{x\to0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(nx)}{\sin x} = n\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(nx)}{(nx)}.\dfrac{x}{\sin x} = n = f(0)$

នាំឲ្យ f_n ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ នោះ f_n ជាប់លើ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ។

ដូចនេះ $f_n(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_{2n+1} និង I_{2n-1}

គេមាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}.dx$ នោះ $I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}.dx$

និង $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}.dx$ ។

គេបាន $I_{2n+1} - I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x}.dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos(2nx)}{\sin x}.dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx).dx = \frac{1}{n}\left[\sin(2nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ដូចនេះ $I_{2n+1} = I_{2n-1}$ ។

Problem76

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n\,I_n)$ ។

Solution

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n\,I_n)$

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n = 0,1,2,...$

គេបាន $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n}+t^{3n+3}}{1+t^3}.dt = \int_0^1 t^{3n}.dt = \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3n+1}$$

$I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{3n+1}$ (1) និង $I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{3n-2}$ (2)

គ្រប់ $t \in [0,1]$ គេមាន $t^{3n} \geq t^{3n+3}$ នាំឲ្យ $\dfrac{t^{3n}}{1+t^3} \geq \dfrac{t^{3n+3}}{1+t^3}$

គេទាញ $\int_0^1 \dfrac{t^{3n}}{1+t^3} dt \geq \int_0^1 \dfrac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$ ឬ $I_n \geq I_{n+1}$ គ្រប់ $n = 0,1,2,...$

នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះគេបាន ៖

$I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ នាំឲ្យ $\dfrac{I_{n+1} + I_n}{2} \leq I_n \leq \dfrac{I_n + I_{n-1}}{2}$ (3)

យកទំនាក់ទំនងនិង(2)ជំនួសក្នុង(3)គេបាន ៖(1)

$\dfrac{1}{6n+2} \leq I_n \leq \dfrac{1}{6n-4}$ នាំឲ្យ $\dfrac{n}{6n+2} \leq nI_n \leq \dfrac{n}{6n-4}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{6n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{6n-4} = \dfrac{1}{6}$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} (n\, I_n) = \dfrac{1}{6}$ ។

Problem77

គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, .dx$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n . I_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (P_k) = P_1 + P_2 + \dots\dots\dots + P_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

Solution

ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

យើងមាន $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, .dx$ និង $I_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2} . \sqrt{1-x^2} .dx$

តាង $\begin{cases} U = \sqrt{1-x^2} \\ dV = x^n .dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} .dx \\ V = \int x^n .dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

យើងបាន $I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}.\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n-(x^n-x^{n+2})}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n-x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}I_n$$

តាង $\begin{cases} U = x^{n-1} \\ dV = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = (n-1)x^{n-2}.dx \\ V = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

នោះ $I_n = \frac{1}{n+1}\left\{\left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}.dx\right\} - \frac{1}{n+1}I_n$

គេទាញ $(n+1)I_n = (n-1)I_{n-2} - I_n$ នាំឱ្យ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} គឺ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}, \forall n \ge 2$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n.I_{n-1}$, $\forall n \ge 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $P_n = I_n.I_{n-1}$ នាំឱ្យ $P_{n+1} = I_{n+1}.I_n$

ដោយ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{n}{n+3}.I_{n-1}$

គេទាញ $P_{n+1} = \frac{n}{n+3}I_{n-1}.I_n = \frac{n}{n+3}P_n$ (ព្រោះ $P_n = I_n.I_{n-1}$)

នាំអោយ $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n}{n+3} = \frac{n}{n+1}.\frac{n+1}{n+2}.\frac{n+2}{n+3}$ ។

យើងបាន $\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right) = \prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k}{k+1}.\frac{k+1}{k+2}.\frac{k+2}{k+3}\right)$

$$\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right) = \prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+2}{k+3}\right)$$

$$\frac{P_2}{P_1}.\frac{P_3}{P_2}....\frac{P_n}{P_{n-1}} = \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1}\right)\times\left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}....\frac{n+1}{n+2}\right)$$

បន្ទាប់ពីសម្រួលគេបាន $\frac{P_n}{P_1}=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{3}{n+2}$

នាំឱ្យគេទាញ $P_n=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.P_1=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.I_0.I_1$

ដោយ $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}.dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

និង $I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}.dx=\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

គេបាន $P_n=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $P_n=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}(P_k)=P_1+P_2+\dots\dots\dots+P_n$

$P_n=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

យើងបាន $S_n=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3})+(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4})+\dots..+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ និង $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi}{8}$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $I_n=\frac{n-1}{n+2}I_{n-2}\,,\ \forall n\ge 2$

.ករណី $n=2p+1$ (ចំនួនសេស)

យើងបាន $I_{2p+1}=\frac{2p}{2p+3}.I_{2p-1}$

ឬ $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\frac{2p}{2p+3}$

គេទាញ $\frac{I_3}{I_1}.\frac{I_5}{I_3}.\frac{I_7}{I_5}.....\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1}=\frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1}=\frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.I_1$ ដោយ $I_1=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $I_{2p+1}=\frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.\frac{1}{3}$ ។

.ករណី $n=2p$ (ចំនួនគូ)

យើងបាន $I_{2p}=\frac{2p-1}{2p+2}.I_{2p-2}$ ឬ $\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{2p-1}{2p+2}$

គេទាញ $\frac{I_2}{I_0}.\frac{I_4}{I_2}.\frac{I_6}{I_4}.....\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$

$$\frac{I_{2p}}{I_0}=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.I_0$ ដោយ $I_0=\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.\frac{\pi}{4}$ ។

Problem78

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក.រក I_0 រួចបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ។ គណនា I_n ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n<\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$ ។

Solution

ក.រក I_0 រួចបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1}

បើ $n=0$ នោះ $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x}.dx$

តាង $\sqrt{1-x}=t$ នាំឲ្យ $x=1-t^2$ នោះ $dx=-t.dt$

បើ $x=0$ នោះ $t=1$ និង $x=1$ នោះ $t=0$

គេបាន $I_0=\int_1^0 t.(-2tdt)=\int_0^1 2t^2.dx=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_0=\frac{2}{3}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$

តាង $\begin{cases}u=x^n\\ dv=\sqrt{1-x}.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=nx^{n-1}.dx\\ v=\int\sqrt{1-x}dx=-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\end{cases}$

$$I_n=\left[-\frac{2x^n}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1+\frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$$

$$I_n=\frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}.dx-\frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$$

$$I_n=\frac{2n}{3}I_{n-1}-\frac{2n}{3}I_n$$

$$(1+\frac{2n}{3})I_n=\frac{2n}{3}I_{n-1}$$

ដូចនេះ $I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

គណនា I_n ៖

គេមាន $I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ នោះ $\frac{I_n}{I_{n-1}}=\frac{2n}{2n+3}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n}\frac{I_k}{I_{k-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+3}$

ឬ $\frac{I_n}{I_0}=\frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}$ ដោយ $I_0=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_n=\frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}\times\frac{2}{3}$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n < \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$

គេមាន $I_n = \dfrac{2\times 4\times 6\times ....\times 2n}{5\times 7\times 9\times ...\times (2n+3)}\times\dfrac{2}{3}$

$$= \frac{2\times 4\times 6\times ....\times (2n+2)}{3\times 5\times 7\times ....\times (2n+3)}\times\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k}{2k+1}$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

គេមាន $(2k)+(2k+2)\ge 2\sqrt{(2k)(2k+2)}$ ឬ $2k+1\ge\sqrt{2k(2k+2)}$

គេទាញ $\dfrac{2k}{2k+1}\le\dfrac{2k}{\sqrt{2k(2k+2)}}=\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}$

គេបាន $I_n\le\dfrac{1}{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}<\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

ដូចនេះ $I_n<\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$ ។

Problem79

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}.dx$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}.dx$

គេអាចសរសេរ $I=\int_0^1\dfrac{x^{\frac{1}{2}}.dx}{\sqrt{x^3+1}}$ តាង $t=x^{\frac{3}{2}}$ នោះ $dt=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.dx$

បើ $x=0$ នោះ $t=0$ និង $x=1$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\dfrac{2}{3}\int_0^1\dfrac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ តាង $t=\tan\varphi$ នោះ $dt=(1+\tan^2\varphi)d\varphi$

បើ $t=0$ នោះ $\varphi=0$ និង $t=1$ នោះ $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi.d\varphi}{1-\sin^2\varphi}$

តាង $u=\sin\varphi$ នោះ $du=\cos\varphi.d\varphi$

បើ $\varphi=0$ នោះ $u=0$ និង $\varphi=\frac{\pi}{4}$ នោះ $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})du$

$I=\frac{1}{3}\left[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})$

ដោយ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$ នោះ $I=\frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)^2$

ដូចនេះ $I=\frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

Problem80

គណនាអាំងតេក្រាល $A=\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)\,dx$ និង $B=\int_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx$

Solution

គណនាអាំងតេក្រាល

$A=\int_1^{e^\pi}\cos(\ln x)\,dx$ និង $B=\int_1^{e^\pi}\sin(\ln x)dx$

យើងបាន $A+iB=\int_1^{e^\pi}\left[\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)\right]dx=\int_1^{e^\pi}e^{i.\ln x}\,dx$

$$A+iB=\int_1^{e^\pi}x^i dx=\left[\frac{1}{1+i}x^{1+i}\right]_1^{e^\pi}=\frac{e^{\pi(1+i)}-1}{1+i}$$

$$A+iB=\frac{e^\pi.e^{i\pi}-1}{1+i}=\frac{(-e^\pi-1)(1-i)}{2}=-\frac{e^\pi+1}{2}+i\,\frac{e^\pi+1}{2}$$

ដូចនេះ $A=-\frac{e^\pi+1}{2}$, $B=\frac{e^\pi+1}{2}$ ។

Problem81

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx \ ; n \in \mathbb{N}$

ក.សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1} ។

ខ.ស្រាយថា $\forall n \geq 2 : \ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{(n-1)e^2}$ ។ ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

Solution

ក.សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1} ៖

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in \mathbb{N}$ គេមាន $x^{n+1} \leq x^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^{-2x} គេបាន $x^{n+1}e^{-2x} \leq x^n e^{-2x}$

នាំឱ្យ $\int_0^1 x^{n+1}e^{-2x}.dx \leq \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx$ ឬ $I_{n+1} \leq I_n$ ។ដូចនេះ I_n ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ម្យ៉ាងទៀត $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx \ ; n \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យ $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{-2x}.dx$

តាង $\begin{cases} u = x^{n+1} \\ dv = e^{-2x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1)x^n.dx \\ v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \left[-\dfrac{1}{2}e^{-2x}x^{n+1}\right]_0^1 + \dfrac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{-2x}.dx$

ដូច្នេះ $I_{n+1} = -\dfrac{1}{2e^2} + \dfrac{n+1}{2}I_n$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

ខ.ស្រាយថា $\forall n \geq 2 : \ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{(n-1)e^2}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

គេមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះគេបាន $I_{n+1} \leq I_n$ តែ $I_{n+1} = -\dfrac{1}{2e^2} + \dfrac{n+1}{2}I_n$

គេបាន $-\dfrac{1}{2e^2} + \dfrac{n+1}{2}I_n \leq I_n$ នាំឲ្យ $I_n \leq \dfrac{1}{(n-1)e^2} (1)$

ហើយ $\forall x \in [0,1] : x^n e^{-2x} \geq 0$ នាំឲ្យ $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx \geq 0$ (2) ។

តាម(1)និង(2) $\forall n \geq 2 :\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2}$ និង $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ ។

Problem82

គេឲ្យ $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ និង $J_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$ ដែល $n = 0,1,2,3,....$ ។

១.រកទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង I_{n-1} និង I_n រួច J_{n-1} និង J_n ។

២.ទាញរក I_n និង J_n ដោយស្គាល់ $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ។

Solution

១.រកទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង I_{n-1} និង I_n រួច J_{n-1} និង J_n

គេមាន $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t^{2n} e^{-t^2} dt$

តាង $\begin{cases} u = t^{2n-1} \\ dv = t\, e^{-t^2} dt \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = (2n-1) t^{2n-2} dt \\ v = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \end{cases}$

គេបាន $I_n = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} t^{2n-1} e^{-t^2} \right]_0^b + \frac{1}{2}(2n-1) \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t^{2n-2} e^{-t^2} dt$

$$I_n = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} b^{2n-1} e^{-b^2} \right] + \frac{1}{2}(2n-1) I_{n-1} = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$$

ព្រោះ $\lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} b^{2n-1} e^{-b^2} \right] = 0$ ។ដូចនេះ $I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $J_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t^{2n}\, t\, e^{-t^2} dt$

តាង $\begin{cases} u = t^{2n} \\ dv = t\, e^{-t^2} dt \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = 2n\, t^{2n-1} dt \\ v = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \end{cases}$

គេបាន $J_n = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} t^{2n} e^{-t^2} \right]_0^b + \frac{1}{2}(2n) \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t^{2n-1} e^{-t^2} dt$

$J_n = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}b^{2n}e^{-b^2}\right] + nJ_{n-1} = nJ_{n-1}$ ព្រោះ $\lim\limits_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}b^{2n-1}e^{-b^2}\right] = 0$ ។

ដូចនេះ $J_n = n\,J_{n-1}$ ។

២.ទាញរក I_n និង J_n ដោយស្គាល់ $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

គេមាន $I_n = \frac{2n-1}{2}I_{n-1}$ គ្រប់ $n \ge 1$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{I_k}{I_{k-1}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2}\right)$ ឬ $\frac{I_n}{I_0} = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n}$

ដោយ $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ដូចនេះ $I_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $J_n = n\,J_{n-1}$ គ្រប់ $n \ge 1$ នោះគេបាន $J_n = n!J_0$

ដោយ $J_0 = \int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}dt = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^{b} t\,e^{-t^2}dt = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^b$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $J_n = \frac{n!}{2}$ ។

Problem83

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) ដោយ $a_n = n\int_0^{\frac{\pi}{n}} x\,e^{x}\cos x\,dx$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $F(x) = \frac{1}{2}\left[(x-1)\sin x + x\cos x\right]e^{x}$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ

$f(x) = xe^{x}\cos x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ខ)ទាញរកតម្លៃនៃ a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចស្រាយថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

Solution

ក.ស្រាយថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$

យើងមាន $F(x) = \frac{1}{2}\left[(x-1)\sin x + x\cos x\right]e^{x}$

យើងបាន ៖

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left[\sin x+(x-1)\cos x+\cos x-x\sin x\right]e^{x}+\frac{1}{2}\left[(x-1)\sin x+x\cos x\right]e^{x}$$

$$=\frac{e^{x}}{2}\left[\sin x+(x-1)\cos x+\cos x-x\sin x+(x-1)\sin x+x\cos x\right]$$

$$F'(x)=\frac{e^{x}}{2}(2x\cos x)=xe^{x}\cos x$$

ដោយ $f(x)=xe^{x}\cos x$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $F'(x)=f(x)$

នាំឲ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $a_n=n\int_0^{\frac{\pi}{n}} x e^{x}\cos x dx=n\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(x)dx=n\left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{n}}=n\left[F\left(\frac{\pi}{n}\right)-F(0)\right]$

ដោយ $F(x)=\frac{1}{2}\left[(x-1)\sin x+x\cos x\right]e^{x}$ នោះ $F(0)=0$

ហើយ $F\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{n}-1\right)\sin\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right]e^{\frac{\pi}{n}}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{2}\left[(\pi-n)\sin\frac{\pi}{n}+\pi\cos\frac{\pi}{n}\right]e^{\frac{\pi}{n}}$ ។

ស្រាយថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម ៖

គេមាន $\lim_{n\to+\infty} a_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left[(\pi-n)\sin\frac{\pi}{n}+\pi\cos\frac{\pi}{n}\right]e^{\frac{\pi}{n}}$

តាង $u=\frac{\pi}{n}$ នោះ $n=\frac{\pi}{u}$ ហើយ $n-\pi=\frac{\pi}{u}-\pi=\frac{u-1}{u}\pi$

កាលណា $n\to\infty$ នោះ $u\to 0$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[-\frac{u-1}{u}\pi\,\text{sinu}+\pi\,\text{cosu}\right]e^{u}$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{u\to 0}\left[-(u-1)\frac{\sin u}{u}+\cos u\right]e^{u}=\frac{\pi}{2}\times(1+1)=\pi$$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}(a_n)=\pi$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក π ។

Problem84

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx \ , n \in \mathbb{N}$

ក.រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ។

ខ.ទាញរក I_{2p} និង I_{2p+1} ដែល $p \in \mathbb{N}$ ។

Solution

ក.រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

មាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x.\cos x.dx \ , n \in IN$

តាង $\begin{cases} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -(n-1)\sin x \cos^{n-2} x.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_n = \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x.dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$,

ខ.ទាញរក I_{2p} និង I_{2p+1} ដែល $p \in \mathbb{N}$

គេមាន $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ នោះ $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$

-បើ $n = 2k$ នោះ $\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \frac{2k}{2k-1}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{p} \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

$$\frac{I_2}{I_0}\cdot\frac{I_4}{I_2}\cdot\frac{I_6}{I_4}\cdots\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times.......\times2p}$$

$$I_{2p}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times......\times2p}\times I_0$$

តែ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ ដូចនេះ $I_{2p}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times......\times2p}\times\frac{\pi}{2}$ ។

-បើ $n=2k+1$ នោះ $\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\frac{2k}{2k+1}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{p}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$

$$\frac{I_3}{I_1}\cdot\frac{I_5}{I_3}\cdot\frac{I_7}{I_5}\cdots\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\frac{2\times4\times6\times....\times2p}{3\times5\times7\times.......\times2p+1}$$

$$I_{2p+1}=\frac{2\times4\times6\times....\times(2p)}{3\times5\times7\times......\times2p+1}\times I_1$$

តែ $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

ដូចនេះ $I_{2p+1}=\frac{2\times4\times6\times....\times(2p)}{3\times5\times7\times......\times2p+1}$ ។

Problem85

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^{\pi}x\sin^n x.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក.ចូរស្រាយថា $I_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$ ។

ខ. ស្រាយថា $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ។

Solution

ក.ស្រាយថា $I_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$

គេមាន $I_n=\int_0^{\pi}x\sin^n x.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

តាង $x=\pi-t$ នោះ $dx=-dt$ បើ $x=0$ នោះ $t=\pi$ និង $x=\pi$ នោះ $t=0$

គេបាន $I_n=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin^n(\pi-t)(-dt)$

$$I_n=\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin^n t.dt=\pi\int_0^{\pi}\sin^n tdt-\int_0^{\pi}t\sin^n t.dt$$

$I_n=\pi\int_0^{\pi}\sin^n x.dx-I_n$ នាំឲ្យ $I_n=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n x.dx$ (1)

គេមាន $\int_0^{\pi}\sin^n x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x.dx$ (2)

តាង $x=\pi-t$ នោះ $dx=-dt$ បើ $x=\frac{\pi}{2}$ នោះ $t=\frac{\pi}{2}$ និង $x=\pi$ នោះ $t=0$

គេបាន $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x.dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi-t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t.dt$ (3)

តាម និង (3) គេបាន (2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x.dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$ (4)

យក ជំនួសក្នុង (1) គេបាន(4) $I_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$ ពិត ។

ស្រាយថា $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

គេមាន $I_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x.\sin xdx$

តាង $\begin{cases}u=\sin^{n-1}x\\ dv=\sin x.dx\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}du=(n-1)\cos x\sin^{n-2}x.dx\\ v=\int\sin xdx=-\cos x\end{cases}$

$$I_n=\pi\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x.dx$$

$$I_n=(n-1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x.dx$$

$$I_n=(n-1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x.dx-(n-1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$$

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

គេទាញ $nI_n=(n-1)I_{n-2}$ ឬ $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ។ ដូចនេះ $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ។

Problem86

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n=1,2,3,...$ ។

ក.គណនា I_1 ។

ខ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចទាញរក I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ /គណនាផលបូក $S_n=I_1+I_2+...+I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ /ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

Solution

ក /គណនា I_1 ៖

បើ $n=1$ នោះ $I_1=\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x.dx$

តាង $\begin{cases}u=e^{-x}\\dv=\sin x.dx\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}du=-e^{-x}.dx\\v=-\cos x\end{cases}$

គេបាន $I_1=\left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\cos x.dx=1+e^{-\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\cos x.dx$

តាង $\begin{cases}u=e^{-x}\\dv=\cos x.dx\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}du=-e^{-x}.dx\\v=\sin x\end{cases}$

គេបាន $I_1=1+e^{-\pi}-\left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x.dx=1+e^{-\pi}-I_1$

ដូចនេះ $I_1=\frac{1+e^{-\pi}}{2}=\frac{1+e^{\pi}}{2e^{\pi}}$ ។

ខ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

មាន $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ នោះ $I_{n+1} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $x = \pi + t$ នោះ $dx = dt$

ចំពោះ $x = n\pi$ នោះ $t = (n-1)\pi$ និង $x = (n+1)\pi$ នោះ $t = n\pi$

គេបាន $I_{n+1} = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-\pi-t}\sin(\pi+t).dt = -e^{-\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t}\sin t.dt$

$I_{n+1} = -e^{-\pi} I_n$ នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ទាញរក I_n ជាអនុគមន៏នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $I_n = I_1 \times q^{n-1} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\times(-e^{-\pi})^{n-1}$ ។

គ.គណនា $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៏នៃ n

គេបាន $S_n = I_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\times\frac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}} = \frac{1-(-e^{-\pi})^n}{2}$

ឃ.គណនាលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$

គេបាន $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+(-e^{-\pi})^n}{2} = \frac{1}{2}$ ព្រោះ $\lim_{n\to\infty}(-e^{-\pi})^n = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ ។

Problem87

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

ក.គណនា I_0 និង I_1 រួចស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ.សរសេរទំនាក់ទំនងរវាងតួ I_n និង I_{n+2} រួចគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+2}}{I_n}$ ។

គ.គណនាផលគុណ $P_n = I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ.គណនា $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ រួចទាញថា $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_n)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ។

ង.រករូបមន្តសម្រាប់គណនា I_n ។

ច.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}$ ។

Solution

ក.គណនា I_0 និង I_1 រួចស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

ចំពោះ $n=0$ គេបាន ៖

$$I_0=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[Arc\sin x\right]_0^1=\arcsin(1)-\arcsin(0)=\frac{\pi}{2}$$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន ៖

$$I_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}.dx\quad=-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=1$$

ដូចនេះ $I_0=\frac{\pi}{2}$ និង $I_1=1$ ។

ខ.សរសេរទំនាក់ទំនងរវាងតួ I_n និង I_{n+2}

គេមាន $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.dx$ នាំឲ្យ $I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

តាង $\begin{cases}u=x^{n+1}\\ dv=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(n+1)x^n.dx\\ v=-\sqrt{1-x^2}\end{cases}$

$$I_{n+2}=\left[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1+(n+1)\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}.dx$$

$$I_{n+2}=(n+1)\int_0^1\frac{x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx=(n+1)\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.dx-(n+1)\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$I_{n+2}=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$ នាំឲ្យ $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$ ។

ដូចនេះ $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+2}}{I_n}$ ៖

គេមាន $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$ គេទាញ $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+2}}{I_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$ ។

គ.គណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $P_n=I_n.I_{n+1}$ នោះ $P_{n+1}=I_{n+1}.I_{n+2}$ តែ $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$

គេបាន $P_{n+1}=I_{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}I_n=\frac{n+1}{n+2}P_n$ ឬ $\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{n+1}{n+2}$

គេទាញ $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{P_{k+1}}{P_k}=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k+2}$ ឬ $\frac{P_n}{P_0}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

ដោយ $P_0=I_0.I_1=\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $P_n=I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n+1}$ ។

ឃ.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_n)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

គេមាន (I_n)ជាស្វីតចុះនោះ $I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n$

គេទាញ $\frac{I_{n+2}}{I_n}\le\frac{I_{n+1}}{I_n}\le 1$ ឬ $\frac{n+1}{n+2}\le\frac{I_{n+1}}{I_n}\le 1$ ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $P_n=I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n+1}$

គេទាញ $n\,I_n^{\,2}=\frac{\pi}{2}.\frac{n}{n+1}.\frac{I_n}{I_{n+1}}$ ឬ $\sqrt{n}\,I_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\times\sqrt{\frac{n}{n+1}}\times\sqrt{\frac{I_n}{I_{n+1}}}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,I_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{I_n}{I_{n+1}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_n)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ។

ង.រករូបមន្តសម្រាប់គណនា I_n

គេមាន $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$ គ្រប់ $n=0\,,1\,,2\,,3,\ldots$

-ករណី $n=2p$ (គូ)

គេបាន $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}=\frac{2p+1}{2p+2}$ នាំឲ្យ $\prod_{p=0}^{k-1}\left(\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}\right)=\prod_{p=0}^{k-1}\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)$

ឬ $\frac{I_{2k}}{I_0}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2k-1)}{2\times4\times6\times......\times(2k)}$ ដោយ $I_0=\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $I_{2k}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2k-1)}{2\times4\times6\times....\times(2k)}\times\frac{\pi}{2}$ ។

-ករណី $n=2p-1$ (សេស)

គេបាន $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\frac{2p}{2p+1}$ នាំឲ្យ $\prod_{p=1}^{k}\left(\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}\right)=\prod_{p=1}^{k}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)$

ឬ $\frac{I_{2k+1}}{I_1}=\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{3\times5\times7\times......\times(2k+1)}$ ដោយ $I_1=1$

ដូចនេះ $I_{2k+1}=\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{3\times5\times7\times......\times(2k+1)}$ ។

ច.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}$

គេមាន $I_{2k+1}=\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{3\times5\times7\times......\times(2k+1)}$ (1)

និង $I_{2k}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2k-1)}{2\times4\times6\times....\times(2k)}\times\frac{\pi}{2}$ (2)

ចែក(1)និង(2)គេបាន $\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}=\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}\times\frac{2}{\pi}$

គេទាញ $\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}.\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}\lim_{k\to+\infty}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}$$

គេមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះ $I_{2k+2}\le I_{2k+1}\le I_{2k}$ គ្រប់ $k=0,1,2,...$

គេបាន $\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}}\le\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}\le1$ ដោយ $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$ នោះ $\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}}=\frac{2k+1}{2k+2}$

ហេតុនេះ $\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}\le1$ ដោយ $\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k+2}=1$ នោះ $\lim_{k\to\infty}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}=1$

ដូចនេះ $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}$ ។

Problem88

គេមានស្វ៊ីត (I_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ដោយ $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

ក.ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ.ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$ ។

គ.រក $\lim_{n\to+\infty} I_n$ រួចទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$ ។

Solution

ក.គណនាតួ I_1

គេមាន $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x.dx = \int_0^1 (1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(-dx) = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e-2$

ដូចនេះ $I = e-2$ ។

ខ.បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

គេមាន $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 (1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ ឬ $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{(n+1)!}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(I_{k+1} - I_k) = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}$

$$I_n - I_1 = -\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - .... - \frac{1}{n!}$$

ដោយ $I_1 = e - 2 = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$

គេបាន $I_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - .... - \frac{1}{n!}$

ដូចនេះ $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ ។

គ.រកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

ចំពោះ $x \in [0,1]$ គេមាន $1 \le e^x \le e$ និង $(1-x)^n \ge 0$

គេបាន $(1-x)^n \le e^x(1-x)^n \le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx \le \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx \le \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx$

ដោយ $\int_0^1 (1-x)^n.dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)} \le I_n \le \frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $n \to +\infty$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$ ។ ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

គេមាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ នាំឱ្យ $\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = e - I_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = \lim_{n\to+\infty}(e - I_n) = e$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$ ។

Problem89

គេមានអនុគមន៍ពីរ f និង F កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$f(x)=(2x^2+2\sqrt{3}x+3)^2e^{x^2}$ និង $F(x)=(2x^3+4\sqrt{3}x^2+9x+2\sqrt{3})e^{x^2}$

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1(2x^2+2\sqrt{3}x+3)^2e^{x^2}dx$ ។

Solution

១.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $\mathbb{R}$

គេមានអនុគមន៍ពីរ f និង F កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$f(x)=(2x^2+2\sqrt{3}x+3)^2e^{x^2}$ និង $F(x)=(2x^3+4\sqrt{3}x^2+9x+2\sqrt{3})e^{x^2}$

យើងមាន $F'(x)=\left[(6x^2+8\sqrt{3}x+9)+2x(2x^3+4\sqrt{3}x^2+9x+2\sqrt{3})\right]e^{x^2}$

$$F'(x)=\left(4x^4+8\sqrt{3}x^3+24x^2+12\sqrt{3}x+9\right)e^{x^2}$$

តាមរូបមន្ត $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ នោះគេបាន

$$\left(2x^2+2\sqrt{3}x+3\right)^2=4x^4+12x^2+9+8\sqrt{3}x^3+12x^2+12\sqrt{3}x$$

$$=4x^4+8\sqrt{3}x^3+24x^2+12\sqrt{3}x+9$$

នោះ $F'(x)=(2x^2+2\sqrt{3}x+3)^2e^{x^2}=f(x)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះស្រាយបញ្ជាក់ថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1(2x^2+2\sqrt{3}x+3)^2e^{x^2}dx$

យើងបាន $I=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)$

ដោយ $F(0)=2\sqrt{3}$, $F(1)=(11+6\sqrt{3})e$ ។

ដូចនេះ $I=(11+6\sqrt{3})e-2\sqrt{3}$ ។

Problem90

គេឱ្យ $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ និង a ជាចំនួនពិតដែល $a>0$ និង $a\neq 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^1 \frac{a^x f(\sin\pi x)}{a^x+\sqrt{a}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(\sin\pi x)dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I=\int_0^1 \frac{4^x\sin^3\pi x}{4^x+2}\cdot dx$ ។

Solution

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_0^1 \frac{a^x f(\sin\pi x)}{a^x+\sqrt{a}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(\sin\pi x)dx$

យក $I=\int_0^1 \frac{a^x f(\sin\pi x)}{a^x+\sqrt{a}}dx \quad (1)$

តាង $x=1-t$ នោះ $dx=-dt$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $t=1$ និង $x=1$ នោះ $t=0$

គេបាន $I=\int_1^0 \frac{a^{1-t}f[\sin\pi(1-t)]}{a^{1-t}+\sqrt{a}}(-dt)=\int_0^1 \frac{a^{1-t}f(\sin\pi t)}{a^{1-t}+\sqrt{a}}dt$

ឬ $I=\int_0^1 \frac{a^{1-x}f(\sin\pi x)}{a^{1-x}+\sqrt{a}}\,dx=\int_0^1 \frac{a\ f(\sin\pi x)}{a+a^x\sqrt{a}}\,dx=\int_0^1 \frac{\sqrt{a}\ f(\sin\pi x)}{a^x+\sqrt{a}}\,dx \quad (2)$

បូកសមភាព $(1)\&(2)$ អង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$2I=\int_0^1 \frac{a^x f(\sin\pi x)}{a^x+\sqrt{a}}dx+\int_0^1 \frac{\sqrt{a}f(\sin\pi x)}{a^x+\sqrt{a}}dx=\int_0^1 f(\sin\pi x)dx$$

គេទាញ $I=\frac{1}{2}\int_0^1 f(\sin\pi x)dx$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{a^x f(\sin\pi x)}{a^x+\sqrt{a}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(\sin\pi x)dx$ ។

អនុវត្តៈ គណនា $I=\int_0^1 \frac{4^x\sin^3\pi x}{4^x+2}\cdot dx$

តាមលក្ខណៈដូចដែលបានស្រាយខាងលើនេះយើងអាចសរសេរ ៖

$$I=\int_0^1 \frac{4^x\sin^3\pi x}{4^x+2}\cdot dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \sin^3\pi x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos^2\pi x)\ \sin\pi x\,dx$$

តាង $u=\cos\pi x$ នោះ $du=-\pi\sin\pi x\,dx$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $u=1$ និង $x=1$ នោះ $u=-1$

គេបាន $I=\frac{1}{2}\int_{1}^{-1}(1-u^2)\left(-\frac{1}{\pi}du\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-u^2)du$

$$I=\frac{1}{2\pi}\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2\pi}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3\pi}$$

ដូចនេះ $I=\frac{2}{3\pi}$ ។

Problem91

គេឲ្យស្វ៊ីត $a_n=\int_0^n x^3e^{-x}dx \ , n\in\mathbb{N}$

$a)$ ចូរកំណត់បួនចំនួនពិត a,b,c,d ដើម្បីឲ្យ $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)=x^3e^{-x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

$b)$ គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} a_n$ ។

Solution

$a)$ កំណត់ a,b,c,d

ដើម្បីឲ្យ $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)=x^3e^{-x}$

លុះត្រាតែ $\forall x\in\mathbb{R}: F'(x)=f(x)$ ។

ដោយ $F'(x)=(3ax^2+2bx+c)e^{-x}-(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$

$$=\left[-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+(c-d)\right]e^{-x}$$

ហើយ $f(x)=x^3e^{-x}$ នោះគេទាញ $\begin{cases}-a=1\\3a-b=0\\2b-c=0\\c-d=0\end{cases}$

ដូចនេះ $a=-1, b=-3, c=-6, d=-6$ ។

$b)$ គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} a_n$

គេមាន $a_n=\int_0^n x^3e^{-x}dx=\int_0^n f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^n=F(n)-F(0)$

ដោយ $F(x)=(-x^3-3x^2-6x-6)e^{-x}$ និង $F(0)=-6$ ។

ដូចនេះ $a_n=-(n^3+3n^2+6n+6)e^{-n}+6$

ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-(n^3+3n^2+6n+6)e^{-n}+6\right]=6$ ។

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^3+3n^2+6n+6)e^{-n}=0$ ។

Problem92

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ និង $x\neq\pm1$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$ ។

ខ.គេពិនិត្យ $I_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{f(x).dx}{1+x^2}$ និង $J_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1}f'(x).dx$ ។

ចូរស្រាយថា $I_{n-1}+4I_{n+1}=\dfrac{J_n}{n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

គ.បង្ហាញថា (I_n) ជាស្ទីតចុះ រួចចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}}\leq I_n\leq\frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$$ ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n2^nI_n)$ ។

Solution

ក.ស្រាយថា $f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$

តាមរូបមន្ត $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

គេបាន $f'(x)=n(\dfrac{x}{1-x^2})'(\dfrac{x}{1-x^2})^{n-1}$

$$=n\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}.\frac{x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-1}}=\frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$ ។

ខ.ស្រាយថា $I_{n-1}+4I_{n+1}=\dfrac{J_n}{n}$

គេបាន $I_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{x^n dx}{(1-x^2)^n(1+x^2)}$ និង $J_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}.dx$

$$I_{n-1}+4I_{n+1}=\int_0^{\sqrt{2}-1}\left[\frac{x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-1}(1+x^2)}+\frac{4x^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}\right].dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{x^{n-1}(1-x^2)^2+4x^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}.dx=\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{x^{n-1}(1+x^2)^2}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}.dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{x^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}.dx=\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{2}-1}f'(x).dx=\frac{1}{n}.J_n$$

ដូចនេះ $I_{n-1}+4I_{n+1}=\dfrac{J_n}{n}$ ។

គ.បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វីតចុះ

គេមាន $I_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{x^n dx}{(1-x^2)^n(1+x^2)}$

តាង $x=\tan\dfrac{\varphi}{2}$ នាំឲ្យ $d\varphi=\dfrac{2dx}{1+x^2}$ និង $\tan\varphi=\dfrac{2x}{1-x^2}$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $\tan\varphi=0$ នោះ $\varphi=0$

ចំពោះ $x=\sqrt{2}-1$ គេបាន $\tan\varphi=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1$ នោះ $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

គេបាន $I_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\varphi.d\varphi$

ចំពោះ $\varphi\in[0,\frac{\pi}{4}]$ គេមាន $\tan^n\varphi\ge\tan^{n+1}\varphi$

គេបាន $\dfrac{1}{2^{n+1}}\tan^n\varphi\ge\dfrac{1}{2^{n+1}}\tan^{n+1}\varphi\ge\dfrac{1}{2^{n+2}}\tan^{n+1}\varphi$

នោះ $\dfrac{1}{2^{n+1}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\varphi.d\varphi\ge\dfrac{1}{2^{n+2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}\varphi.d\varphi$ ឬ $I_n\ge I_{n+1}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វីតចុះ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$

គេមាន $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{J_n}{n}$

ហើយ $J_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} f'(x).dx = \left[f(x)\right]_0^{\sqrt{2}-1} = \left[(\frac{x}{1-x^2})^n\right]_0^{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2^n}$

គេបាន $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{1}{n.2^n}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វីតចុះ នោះគេមាន $I_{n+2} \le I_n$ ឬ $I_n + 4I_{n+2} \le 5I_n$

តែ $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{1}{n.2^n}$ គេទាញ $I_n + 4I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

ហេតុនេះ $5I_n \ge \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ ឬ $I_n \ge \frac{1}{5(n+1).2^{n+1}}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $I_n \le I_{n-2}$ ឬ $5I_n \le I_{n-2} + 4I_n$ តែ $I_{n-2} + 4I_n = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$

ហេតុនេះ $5I_n \le \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$ ឬ $I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$ (2)

តាម(1)និង(2)គេបាន $\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$ ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} (n\,2^n I_n)$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $n.2^n$ គេបាន $\frac{n}{10(n+1)} \le n2^n I_n \le \frac{1}{10(n-1)}$

ហេតុនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{10(n+1)} \le \lim\limits_{n\to\infty} (n2^n I_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10(n-1)}$

$$\frac{1}{10} \le \lim_{n\to\infty} (n2^n I_n) \le \frac{1}{10}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} (n\,2^n I_n) = \frac{1}{10}$ ។

Problem93

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sqrt{\tan x}.dx \ , n = 0,1,2,...$ ។

ក.ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា I_0 ។

ខ.គណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ.ស្រាយថា $\frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}$ ។រកលីមីត $\lim_{n\to\infty} I_n$ និង $\lim_{n\to\infty} (nI_n)$ ។

Solution

ក.ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា I_0

គេមាន $\forall x \in [o, \frac{\pi}{4}] : \ \tan^{n+1} x \le \tan^n x$

ឬ $\tan^{n+1} x.\sqrt{\tan x} \le \tan^n x.\sqrt{\tan x}$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x\sqrt{\tan x}.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\sqrt{\tan x}.dx$ ឬ $I_{n+1} \le I_n$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា ។

បើ $n=0$ គេបាន $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}.dx$

តាង $\sqrt{\tan x} = t$ នោះ $dt = \frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}.dx = \frac{1+t^4}{2t}.dx$

នាំឲ្យ $dx = \frac{2t}{1+t^4}.dt$ ហើយចំពោះ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ នោះ $t \in [0,1]$

គេបាន $I_0 = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4}.dt = \int_0^1 \frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{1+t^4}.dt$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt - \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4}.dt$$

យក $A = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}.dt = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}.dt = \int_0^1 \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

យក $B=\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4}.dt=\int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2}-1}{t^2+\frac{1}{t^2}}.dt=-\int_0^1 \frac{d(t+\frac{1}{t})}{(t+\frac{1}{t})^2-2}$

$$B=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\Bigg|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $I_0=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

ខ.គណនា I_n+I_{n+2} ជាអនុគមន៍នៃ n

គេបាន $I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2} x)\sqrt{\tan x}.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+\frac{1}{2}}x.(1+\tan^2 x).dx$$

តាង $t=\tan x \Rightarrow dt=(1+\tan^2 x).dx$

ចំពោះ $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ នោះ $t\in[0,1]$

គេបាន $I_n+I_{n+2}=\int_0^1 t^{n+\frac{1}{2}}.dt=\left[\frac{2}{2n+3}t^{n+\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{2n+3}$

ដូចនេះ $I_n+I_{n+2}=\frac{2}{2n+3}$ ។

គ.ស្រាយថា $\frac{1}{2n+3}\le I_n\le\frac{1}{2n-1}$

គេមាន $I_n+I_{n+2}=\frac{2}{2n+3}$ (1)

គេបាន $I_{n-2}+I_n=\frac{2}{2n-1}$ (2) គ្រប់ $n\ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះ $I_n+I_{n+2}\le 2I_n\le I_{n-2}+I_n$ (3)

តាម (1),(2) & (3) គេបាន $\frac{2}{2n+3}\le 2I_n\le\frac{2}{2n-1}$

ដូចនេះ $\frac{1}{2n+3}\le I_n\le\frac{1}{2n-1}$ ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to\infty} I_n$ និង $\lim_{n\to\infty}(nI_n)$

គេមាន $\frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}$ នោះ $\frac{n}{2n+3} \le nI_n \le \frac{n}{2n-1}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ និង $\lim_{n\to\infty}(nI_n) = \frac{1}{2}$ ។

Problem94

គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់ដោយ ៖

$f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$

$g(x) = \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x})$

ក.គណនាដេរីវេនៃ $h(x) = f(x) - g(x)$ ។

ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}.dx$ ។

Solution

ក.គណនាដេរីវេនៃ $h(x) = f(x) - g(x)$

គេបាន $h'(x) = f'(x) - g'(x)$

ដោយ $f'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)'}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$

ហើយ $g'(x) = \frac{(\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x})'}{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}}$

$$g'(x) = \frac{\cos x - \sin x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}}{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x) + \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sqrt{\sin 2x}}}{\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}}$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

គេបាន $h'(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}} - \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{2\sin x}{\sqrt{2\sin x \cos x}}$

ដូចនេះ $h'(x) = \sqrt{2}.\sqrt{\tan x}$ ។

ខ.ទាញរកអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}.dx$

គេបាន $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}.\sqrt{\tan x}.dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}h'(x).dx=\frac{1}{\sqrt{2}}[h(\frac{\pi}{4})-h(0)]$

ដោយ $h(\frac{\pi}{4})=f(\frac{\pi}{4})-g(\frac{\pi}{4})=\arcsin(0)-\ln(\sqrt{2}+1)=-\ln(\sqrt{2}+1)$

និង $h(0)=\arcsin(-1)-\ln(1)=-\frac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះ $I=\frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{\pi}{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$ ។

Problem95

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_1^e\frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx\ ;\ n=0,1,2,....,e=2.71828$

ក.គណនា I_0 ។

ខ.បង្ហាញថា $I_n+I_{n+1}=\frac{e^{2n+2}-1}{2(n+1)e^{2n+2}}$ ។

គ.គ្រប់ $x\geq 1$ ស្រាយថា $\frac{1}{2}x^{-2(n+1)}\leq\frac{x^{-2n}}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}x^{-2n}$ ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}I_n$ និង $\lim_{n\to+\infty}nI_n$ ។

Solution

ក.គណនា I_0

គេបាន $I_0=\int_1^e\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int_1^e(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}).dx$

$$=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^e=\ln\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{1+e^2}}$$

ដូចនេះ $I=\ln\frac{e\sqrt{2}}{1+e^2}$ ។

ខ.បង្ហាញថា $I_n+I_{n+1}=\frac{e^{2n+2}-1}{2(n+1)e^{2n+2}}$

គេបាន $I_n+I_{n+1}=\int_1^e\frac{x^{-(2n+3)}+x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx$

$$=\int_1^e x^{-2n-3}.dx=\left[-\frac{1}{2n+2}x^{-2n-2}\right]_1^e=\frac{1-e^{-2n-2}}{2(n+1)}$$

ដូចនេះ $I_n+I_{n+1}=\dfrac{e^{2n+2}-1}{2(n+1)e^{2n+2}}$ ។

គ.ស្រាយថា $\dfrac{1}{2}x^{-2(n+1)}\le\dfrac{x^{-2n}}{1+x^2}\le\dfrac{1}{2}x^{-2n}$

គ្រប់ $x\ge 1$ គេមាន $x^{2n+2}\ge x^{2n}$

គេបាន $\dfrac{1}{x^{2n+2}}\le\dfrac{1}{x^{2n}}$ ឬ $x^{-2(n+1)}\le x^{-2n}$

$$\frac{1}{2}x^{-2(n+1)}\le\frac{1}{2}x^{-2n}$$

$$\frac{1}{2}x^{-2n}+\frac{1}{2}x^{-2(n+1)}\le x^{-2n}$$

$$\frac{1}{2}x^{-2(n+1)}(1+x^2)\le x^{-2n}$$

គេទាញបាន $x^{-2(n+1)}\le\dfrac{x^{-2n}}{1+x^2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\forall x\ge 1:\ x^{2n}\ge x^{2n-2}$ ឬ $x^{-2n}\le x^{-2n+2}$

គេទាញ $x^{-2n}\le\dfrac{1}{2}x^{-2n+2}+\dfrac{1}{2}x^{-2n}=\dfrac{1}{2}x^{-2n}(1+x^2)$ នាំឲ្យ $\dfrac{1}{2}x^{-2n}\ge\dfrac{x^{-2n}}{1+x^2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\dfrac{1}{2}x^{-2(n+1)}\le\dfrac{x^{-2n}}{1+x^2}\le\dfrac{1}{2}x^{-2n}$ គ្រប់ $x\ge 1$ ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$

គេមាន $\dfrac{1}{2}x^{-2(n+1)}\le\dfrac{x^{-2n}}{1+x^2}\le\dfrac{1}{2}x^{-2n}$ គ្រប់ $x\ge 1$

គេបាន $\dfrac{1}{2}x^{-2n-3}\le\dfrac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}\le\dfrac{1}{2}x^{-2n-1}$

$$\frac{1}{2}\int_1^e x^{-2n-3}.dx\le\int_1^e\frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx\le\frac{1}{2}\int_1^e x^{-2n-1}.dx$$

$$-\frac{1}{4(n+1)}\left[x^{-2n-2}\right]_1^e\le I_n\le-\frac{1}{4n}\left[x^{-2n}\right]_1^e$$

$$\frac{1-e^{-2n-2}}{4(n+1)}\le I_n\le\frac{1-e^{-2n}}{4n}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-2n-2}}{4(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-2n}}{4n}=0$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ ។

ហើយម្យ៉ាងទៀត $\frac{n(1-e^{-2n-2})}{4(n+1)} \le nI_n \le \frac{1-e^{-2n}}{4}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1-e^{-2n-2})}{4(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-2n}}{4} = \frac{1}{4}$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$ ។

Problem96

គណនាមាឌសូលីដបរិវត្តន៍កំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រឡា ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ និង $g(x) = 9 - x$ ។

Solution

គណនាមាឌសូលីដបរិវត្ត

យើងបាន $V_{0x} = \pi\int_{-2}^{3}\left[g^2(x) - f^2(x)\right] dx$

$$= \pi\int_{-2}^{3}\left[(9-x)^2 - (x^2-2x+3)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_{-2}^{3}\left(72 - 6x - 9x^2 + 4x^3 - x^4\right)dx$$

$$= \pi\left[72x - 3x^2 - 3x^3 + x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{3}$$

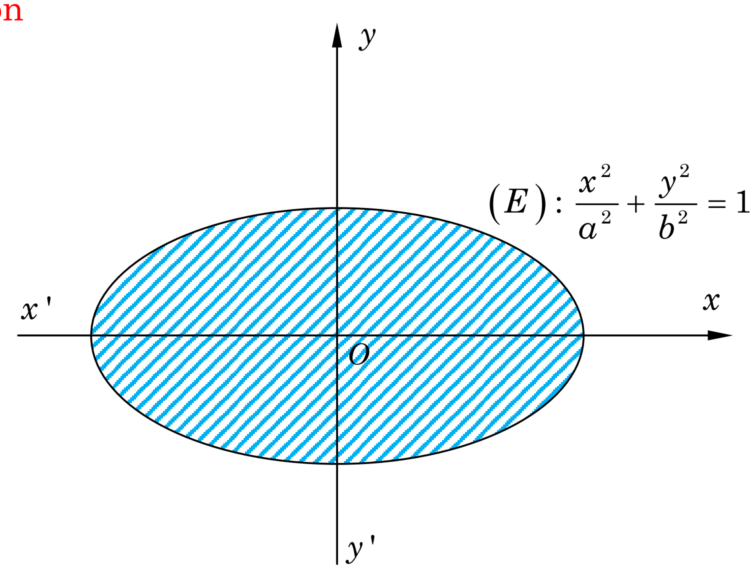
$$= \pi\left(189 - \frac{243}{5} + 116 - \frac{32}{5}\right) = 250\pi$$

ដូចនេះ $V_{0x} = 250\pi$ (ឯកតាមាឌ) ។

Problem97

ចូររកក្រឡាផ្ទៃរបស់អេលីបដែលមានសមីការ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ។

Solution



គេមាន $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ សមមូល $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

ក្រឡាផ្ទៃរបស់អេលីបគឺ $S=2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.dx$

តាង $x=a\sin t\Rightarrow dx=a\cos t.dt$ ចំពោះ $x\in[-a,a]$ នោះ $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

គេបាន $S=2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.dt=\pi ab$

ដូចនេះ $S=\pi ab$ ។

Problem98

ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y=4-x^2$ និងបន្ទាត់ (D)

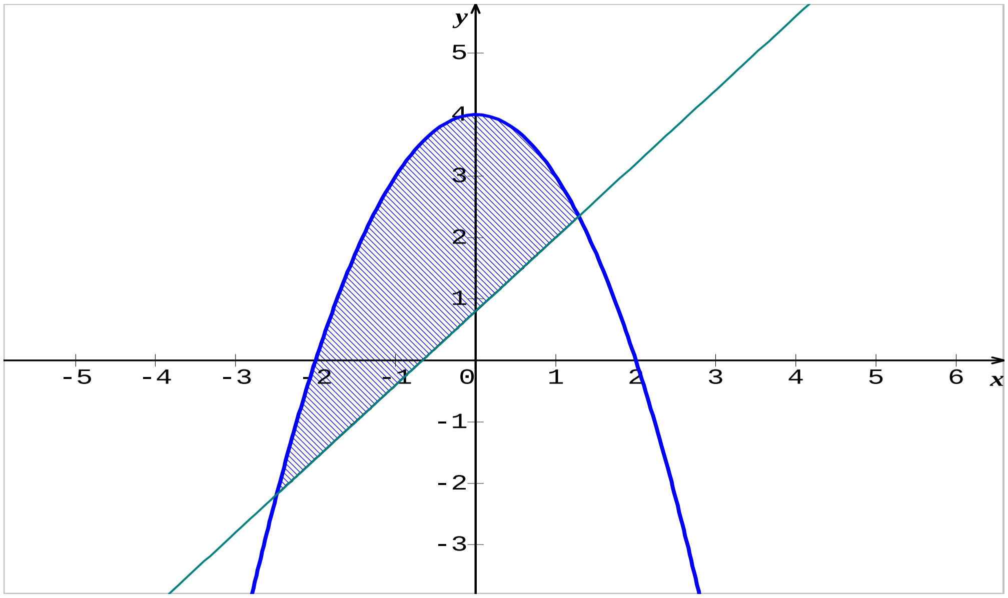
មានមេគុណប្រាប់ទិស m វិលជុំវិញចំណុច $A(1,2)$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d)

មានតម្លៃអប្បបរមា រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានោះ ។

Solution

កំណត់តម្លៃ m



សមីការបន្ទាត់ $(d): y-2=m(x-1)$ ឬ $y=mx-m+2$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d) ៖

$mx-m+2=4-x^2$ ឬ $x^2+mx-m-2=0$ (E)

ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=m^2+4m+8=(m+2)^2+4>0\ \forall m\in IR$

នោះសមីការ (E) មានឫសពីរជានិច្ច ។ ហេតុនេះបន្ទាត់ (d) កាត់ (c) បានពីរចំណុច

A និង B ដែល $x_A+x_B=-m$ (1) ; $x_Ax_B=-m-2$ (2)

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (d) និង (c) ។

$$S=\int_{x_A}^{x_B}\left[(4-x^2)-(mx-m+2)\right].dx$$

$$=\int_{x_A}^{x_B}(-x^2-mx+m+2).dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+(m+2)x\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$=-\frac{1}{3}(x_B^3-x_A^3)-\frac{1}{2}m(x_B^2-x_A^2)+(m+2)(x_B-x_A)$$

$$=-\frac{1}{6}(x_B-x_A)[2(x_A^2+x_Ax_B+x_B^2)+3m(x_A+x_B)-6m-12]$$

$$=-\frac{1}{6}(x_B-x_A)[2(x_A+x_B)^2-2x_Ax_B+3m(x_A+x_B)-6m-12]\quad(3)$$

យក (1) និង (2) ជួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$S=-\frac{1}{6}(x_B-x_A)[2m^2+2m+4-3m^2-6m-12]$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}\ (-m^2-4m-8)$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{m^2+4m+8}\ .\ (m^2+4m+8)=\frac{1}{6}\left[\sqrt{(m+2)^2+4}\ \right]$$

ដើម្បីឱ្យ S មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $(m+2)^2=0$ នោះ $m=-2$ ហើយផ្ទៃក្រឡា

អប្បបរមានោះគឺ $S_{\min}=\frac{1}{3}$ ។

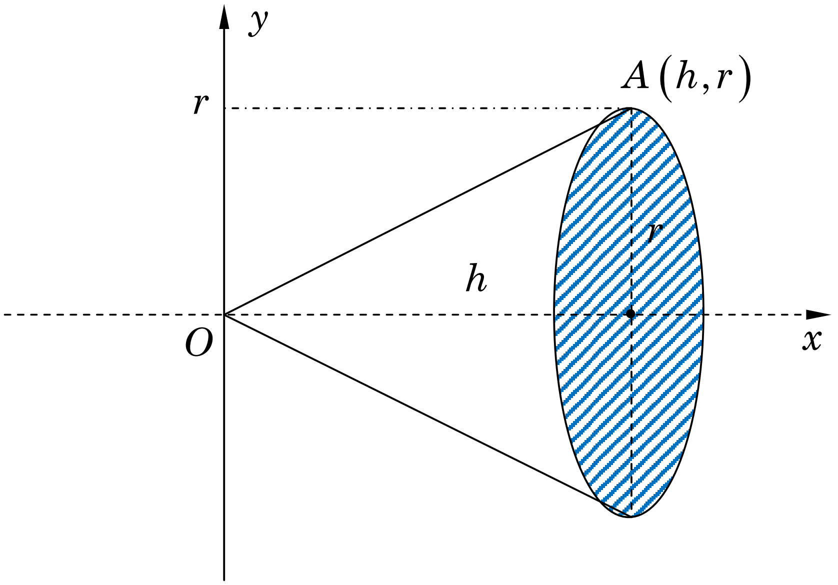
Problem99

ចូរស្រាយថាកោណបរិវត្តន៍ដែលមានកាំថាសបាត r និង កម្ពស់ h មានមាឌ ៖

$V=\frac{1}{3}\pi\, r^2 h$ ។

Solution

ស្រាយថា $V=\frac{1}{3}\pi\, r^2 h$



មាឌរបស់កោណបានមកពីរង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $(OA): y=\frac{r}{h}x$

ជុំវិញអក្ស័ (ox) ក្នុងចន្លោះ $[0,h]$ ។

គេបាន $V=\pi\int_0^h y^2.dx$

$$=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2.dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}-0\right)=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ដូចនេះ $V=\frac{1}{3}\pi\, r^2 h$ ។

Problem100

ក.គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ ពី $x=1$ ទៅ $x=3$ ។

ខ.ឧបមាថា $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ ។ បន្ទាត់ជួបអក្ស័អរដោនេត្រង់ B ហើយប៉ះនិងក្រាបតាង f ត្រង់ចំនុច $A(a, f(a))$ ដែល $a>0$ ។ ប្រៀបធៀបប្រវែងនៃអង្កត់ AB និងប្រវែងធ្នូរនៃក្រាបតាង f នៅបន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=a$ ។

Solution

ក.គណនាប្រវ៉ែងធ្នូ

តាមរូបមន្ត $L=\int_1^3\sqrt{1+y'^2}.dx$ ដោយ $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ នោះគេបាន $y'=x^2-\frac{1}{4x^2}$

$$L=\int_1^3\sqrt{1+(x^2-\frac{1}{4x^2})^2}.dx=\int_1^3(x^2+\frac{1}{4x^2})^2.dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\right]_1^3=\frac{53}{6}$$

ដូចនេះ $L=\frac{53}{6}\approx 8.833$ ឯកតាប្រវែង។

ខ.ប្រៀបធៀបប្រវ៉ែងនៃអង្កត់ AB និងប្រវ៉ែងធ្នូរនៃក្រាបតាង f នៅចន្លោះ $x=0$ និង $x=a$

សមីការបន្ទាត់ T ប៉ះក្រាបតាង $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ គឺ

$T: y-f(a)=f'(a)(x-a)$ ដែល $f'(a)=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})$

បើ $x=0 \Rightarrow y=-af'(a)+f(a)$ នោះ $B(0\,,-af'(a)+f(a))$

គេបាន $AB=\sqrt{a^2+a^2f'^2(a)}=a\sqrt{1+f'^2(a)}=a\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^a-e^{-a})^2}=\frac{a}{2}(e^a+e^{-a})$

ហើយ $L=\int_0^a\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}.dx=\frac{1}{2}\int_0^a(e^x+e^{-x}).dx$

$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^a=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})\text{ ។}$$

ដូចនេះ $AB=\frac{a}{2}\left(e^a+e^{-a}\right)$ និង $L=\frac{1}{2}\left(e^a-e^{-a}\right)$ ។

Problem101

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n .dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

តាង $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ ។

១.ចូរស្រាយថា $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$ ។

២.គណនា S_n រួចទាញរក I_n ។

៣.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា៖

$$\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$ ។

Solution

១.ស្រាយថា $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$

គេមាន $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n.dx = \int_0^1 \left[(x+1)-1\right](1+x)^n.dx$

$$I_n = \int_0^1 (x+1)^{n+1}.dx - \int_0^1 (x+1)^n.dx$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^1 (1+x)^{k+1}.dx - \int_0^1 (1+x)^k.dx\right]$

$= \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx - \int_0^1 dx$ ដោយ $\int_0^1 dx = 1$

ដូចនេះ៖ $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$ ។

២.គណនា S_n រួចទាញរក I_n

គេមាន $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$

$$= -1 + \left[\frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2}\right]_0^1 = -1 + \frac{2^{n+2}-1}{n+2}$$

ដូចនេះ៖ $S_n = -1 + \frac{2^{n+2}-1}{n+2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $S_n = I_0 + I_1 + ... + I_n = S_{n-1} + I_n$ នោះ៖ $I_n = S_n - S_{n-1}$

$$I_n = (-1+\frac{2^{n+2}-1}{n+2}) - (-1+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}) = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $I_n = \dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ ។

៣.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា

$$\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

តាមទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x គេបាន $x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}$

ធ្វើអាំងតេក្រាលកំណត់ពី 0 ទៅ 1 លើសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\int_0^1 x(1+x)^n.dx = \int_0^1 (C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}).dx$$

$$I_n = \left[\frac{1}{2}C_n^0 x^2 + \frac{1}{3}C_n^1 x^3 + \frac{1}{4}C_n^2 x^4 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n x^{n+2}\right]_0^1$$

$$I_n = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{2}C_n^0 + \dfrac{1}{3}C_n^1 + \dfrac{1}{4}C_n^2 + ... + \dfrac{1}{n+2}C_n^n = \dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៣

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ

01.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_{1}^{2}(3x^2+2x+1)\,dx$ $\quad J=\int_{0}^{2}(4x^3-2x)dx$

$K=\int_{-1}^{2}(9x^2+2x-7)dx$ ។

02.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_{-1}^{1}x^3(3x+5)^2dx\,dx$ $\quad J=\int_{1}^{2}(5x^2+3)^2)dx$

$K=\int_{0}^{2}\left(2x+3+\frac{1}{x+2}\right)dx$ ។

03.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x+3)\,dx$ $\quad J=\int_{0}^{1}(e^x+2x-1)dx$

$K=\int_{1}^{5}(4x-2+\frac{1}{x+3})dx$ ។

04.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_{-1}^{1}2x^2(7x^2-5)^2dx$ $\quad J=\int_{0}^{2}(3x^2+4x+\frac{1}{x+2})dx$

$K=\int_{1}^{2}(4x^3-3x^2+2x-\frac{1}{x})dx$ ។

05.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_{1}^{2}\frac{4x^3+x^2-x+4}{x^2}dx$ $\quad J=\int_{0}^{1}(e^x+3x^2-2x-1)dx$

$K=\int_{1}^{2}(5x^4+3x^2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})dx$ ។

06.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(2\cos^2 x+1\right)dx$$

$$K=\int_1^3\left(3x^2+2x-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$$

07.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^2\frac{x-2}{x+2}dx \qquad J=\int_0^2\frac{2x^2-3x+1}{x+1}dx$$

$$K=\int_0^2\frac{2x^2+5x}{x+2}dx$$

08.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sin x+\cos x\right)dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\sin 3x\,dx$$

09.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^1(e^x-2)^2dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^3 2x-3\sin 2x+1}{\cos^2 x}dx$$

$$K=\int_0^2\frac{3x^3+(2x-1)^2}{x+2}dx$$

10.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_1^3\frac{4x^4-5x^3-11x^2-2x+1}{x+1}dx \qquad J=\int_{-1}^2\frac{3x^3+2x^2-8x+1}{x+2}dx$$

$$K=\int_0^1\frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

11.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^1 (5x^2+3)^2\,dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x-\cos x)^2\,dx$$

$$K=\int_0^1 \frac{e^{3x}+3e^{2x}-3e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

12.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx \qquad J=\int_1^2 \frac{4x-1}{2x^2-x+1}\,dx$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

13.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{(1+4\cos^2 x)^2} \qquad J=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x-x+1}\,dx$$

$$K=\int_0^1 \frac{x(e^{x^2}-1)}{e^{x^2}-x^2}\,dx$$

14.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx \qquad J=\int_0^1 \frac{(x+1)^2e^x}{(x^2+1)e^x+2}\,dx$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{2+\cos x+\sin x}\,dx$$

15.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\cos 2x}{1+2\cos x}\,dx \qquad J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x+2\cot x\right)^2\,dx$$

$$K=\int_0^{\pi} (2\sin x+3\cos x)^2\,dx$$

16. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-2x-7}{(x+2)(x+1)^2}$ ដែល $x\neq -2$, $x\neq -1$ ។

$a)$ ចូរកំណត់ពីចំនួនពិត A និង B ដោយដឹងថា $f(x)=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+1)^2}$ ។

$b)$ គណនា $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ ។

17. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{4x^2-7x+5}{(x+1)(x^2-3x+4)}$ ដែល $x\neq -1$ ។

$a)$ កំណត់បីចំនួនពិត A,B,C ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-3x+4}$ ។

$b)$ គណនា $I=\int_1^3 f(x)\,dx$ ។

18. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^2 \dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+2}dx$ និង $J=\int_0^2 \dfrac{2x+1}{x^2+x+2}dx$ ។

$a)$ គណនា $I-J$ ។

$b)$ គណនា J រួចទាញរក I ។

19. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_2^3 \dfrac{x^3+3x}{x^2+1}dx$ និង $J=\int_2^3 \dfrac{x^3-x}{x^2+1}dx$ ។

$a)$ គណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

$b)$ ទាញរក I និង J ។

20. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 2x}{1+2\cos x}dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{1+2\cos x}dx$ ។

$a)$ គណនា $I+J$ ។

$b)$ គណនា J រួចទាញរក I ។

21. គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$ ។

$a)$ គណនា $I+J$ ។

$b)$ គណនា I រួចទាញរក J ។

22.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos x}{2+\cos x+\sin x}dx$ និង $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin x}{2+\cos x+\sin x}dx$ ។

$a)$ គណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

$b)$ ទាញរក I និង J ។

23.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)^2\,dx$ $\qquad J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cot x)^2\,dx$

$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^3 x-4\sin 2x+1}{\cos^2 x}dx$ ។

24.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_2^3\frac{x^2+2x+3}{x(x-1)}dx$ $\qquad J=\int_{-1}^0\frac{2x^2-7x+3}{(x-1)(x+2)}dx$

$K=\int_3^4\frac{x^2-3x+3}{(x-1)(x-2)}dx$ ។

25.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{6x^2-10x+8}{(x-1)(x+1)(x-3)}$

ដែល $x\in\mathbb{R}-\{-1,1,3\}$ ។

ក.កំណត់បីចំនួនពិត A,B,C ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_4^5 f(x)\,dx$ ។

26.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}.dx$ $\qquad J=\int_0^1\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+4})}{\sqrt{x^2+4}}.dx$

$K=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^5 x}.dx$ ។

27.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\pi}x\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\pi}x\sin^2 x.dx$

ក.គណនា $I+J$ និង $I-J$ $\qquad$ ខ.ទាញរក I និង J ។

28.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{e^{-x}+x}.dx$ និង $J=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}dx$

គណនា $I+J$,J រួចទាញរក I ។

29.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\pi}e^{nx}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_{0}^{\pi}e^{nx}\sin^2 x.dx$,$n\in\mathbb{N}$

ក.គណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ.ទាញរក I និង J ។

30.គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}.dx$ និង $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

ក.គណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ.ទាញរក I និង J ។

31.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}.dx$ ។

32.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan x}{\cos^2 x+\sin 2x}dx$

33.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x}{\sin^2 x-2\sin x+2}dx$

34.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{2\pi}\left(\sqrt{2-2\cos 2x}+\sqrt{2+2\cos 2x}\right)dx$

35.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\pi}x\sin x\cos^4 x\ dx$.

36.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x(2x+1)^2+x-4}{x^4+x^2+1}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ក.កំណត់ចំនួនពិត m,n,p,q ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{mx+n}{x^2-x+1}+\frac{px+q}{x^2+x+1}$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{1}^{2}f(x)\,dx$ ។