គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ

MathtodaY

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

* សង្ខេបមេរៀននិងគន្លឹះដោះស្រាយសំខាន់ៗ
* លំហាត់ជ្រើសរើសអមដោយដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ
* លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិតនិងថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

អ្នករៀបរៀង លឹម ផល្គុន

2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

លំហាត់ទី២៦

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan \pi x}{1-x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\sin^2 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}+2\right)=1+2=3$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=3$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)\sin 3x}{x+2-2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)\frac{\sin 3x}{3x}\times 3\right]=6\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$ រាង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)\sin^2 x}{1+x\sin x-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)\sin^2 x}{x\sin x+\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{2\times 1}{2} = 1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x} = 1$ ។

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាមរូបមន្ត $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ឬ $\sin x = \tan x\cos x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan x\cos x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos^2 x)}{x^3(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x} = 1\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$ ។

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+\sin x-\cos x}{x}}{\frac{1-\sin x-\cos x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x}} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=-1$ ។

ប. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}+2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$=2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\dfrac{3}{2}$ ។

ផ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos x\sin^2 x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}+2\lim_{x\to 0}\left(\cos x\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=2\times\frac{1}{4}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\dfrac{5}{2}$ ។

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{\left(\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}\right]^2\times\frac{\sin^4\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^4}\times\frac{1}{16}=2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\dfrac{1}{8}$ ។

ឈ. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ តាង $x=1-u$ នោះ $x\to 1$ គេបាន $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\left[1-(1-u)^2\right]\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)=\lim_{u\to 0}\left[u(2-u)\right]\cot\frac{\pi u}{2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[(2-u)\frac{\dfrac{\pi u}{2}}{\tan\dfrac{\pi u}{2}}\times\frac{2}{\pi}\right]=2\times\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{4}{\pi}$ ។

ញ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan\pi x}{1-x}$ តាង $x=1-u$ នោះ $x\to 1$ គេបាន $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\tan(\pi-\pi u)}{u}=-\lim_{u\to 0}\frac{\tan\pi u}{\pi u}\times\pi=-\pi$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan\pi x}{1-x}=-\pi$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{2-2\cos ax}{x^2}$ ដែល $a \in \mathbb{R}$ ។

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 100$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 100$

គេមាន $f(x) = \dfrac{2-2\cos ax}{x^2} = \dfrac{4\sin^2\dfrac{ax}{2}}{x^2}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin^2\dfrac{ax}{2}}{x^2} = 4\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2\dfrac{ax}{2}}{\left(\dfrac{ax}{2}\right)^2} \times \dfrac{a^2}{4} = a^2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 100$ នោះ $a^2 = 100$ ឬ $a = \pm 10$ ។

ដូចនេះ $a = -10$ ឬ $a = 10$ ។

លំហាត់ទី២៨

មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^n}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

កំណត់គ្រប់ n ដែលធ្វើឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ n ដែលធ្វើឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ជាចំនួនពិត

យើងមាន $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^n}$ ដោយ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

គេបាន $f(x)=\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^n}=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cos x}=\dfrac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x^n\cos x(1+\cos x)}$

$$=\frac{\sin^3 x}{x^n\cos x(1+\cos x)}=\frac{\sin^3 x}{x^n}\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$$

នោះ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 x}{x^n}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)}$

ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3 x}{x^n}$ ជាចំនួនពិតពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $n\le3$ ហើយដោយ $n\in\mathbb{N}$ នោះ $n=1,2,3$ ។

.ចំពោះ $n=1$ ឬ $n=2$ គេបាន $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ ។

.ចំពោះ $n=3$ គេបាន $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)\right]$ ឃ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}$

តាង $x=\dfrac{\pi}{2}-u$ ហើយកាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $u\to0$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}=\lim_{u\to 0}\frac{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{2u}{\sin u}=2$ ។

ខ. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$ តាង $x=1-u$ ហើយកាលណា $x\to 1$ នោះ $u\to 0$

គេបាន $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi-\pi u)}{-u}=-\lim_{u\to 0}\frac{\sin\pi u}{\pi u}\times\pi=-\pi$ ។

គ. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2-3\cos x+\cos^2 x}{x^2\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(2-\cos x)}{x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{2-\cos x}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3)\right]=\frac{1}{2}$

ឃ. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$ តាង $z=1-x$ នាំឲ្យ $x=1-z$

កាលណា $x\to 1$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2})}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos\frac{\pi z}{2}}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi z}{4}}{z^2}=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi z}{4}}{(\frac{\pi z}{4})^2}.\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ ។

លំហាត់ទី៣០

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 3x}{1-\cos 4x}$

ខ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

គ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2-x\sin x}$

ឃ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^3\sin 2x}$

ង) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x-\sin 2x}{x(1-\cos 4x)}$

ចា) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin 2x-\sin 6x}{x^3+\sin^3 x}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos^4 5x}$

ជ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3(2x^2)}{(\tan x-\sin x)^2}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^4(2x^3)}{(3\sin x-\sin 3x)^2}$

ញ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{1-\cos^4 3x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-\sin^2 3x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-\sin^2 3x}{2\sin^2 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 3x}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2-\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\times3\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\times2\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1-9}{4}=-1$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 3x}{1-\cos 4x}=-1$ ។

ខ) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)-\left(1-2\sin^2\dfrac{3x}{2}\right)}{2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{3x}{2}}{2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\times\frac{3}{2}\right)}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2} = -\frac{1}{4}+\frac{9}{4} = 2 \text{ ។}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x} = 2$ ។

គ) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2-x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x(x-\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+1 = 2$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2-x\sin x} = 2$ ។

ឃ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^3\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)^2}{x^3\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^4 x}{2x^3\sin x\cos x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3\cos x} = 2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\frac{1}{\cos x}\right] = 2 \text{ ។}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^3\sin 2x} = 2$ ។

ង) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x(1-\cos 4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\sin 2x}{2x\sin^2 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{2x\sin^2 2x\cos 2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2x\sin 2x\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x\sin x\cos x\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{2\cos x\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x\left(1-\cos 4x\right)}=\frac{1}{2}$ ។

ប) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 2x-\sin 6x}{x^3+\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 2x-\left(3\sin 2x-4\sin^3 2x\right)}{x^3+\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3 2x}{x^3+\sin^3 x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^3 2x}{x^3}}{\frac{x^3+\sin^3 x}{x^3}}=4\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^3}{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}=\frac{4\times 8}{2}=16$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 2x-\sin 6x}{x^3+\sin^3 x}=16$ ។

ផ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos^4 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 2x\right)+\left(1-\cos 4x\right)}{\left(1-\cos^2 5x\right)\left(1+\cos^2 5x\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+2\sin^2 2x}{\sin^2 5x\left(1+\cos^2 5x\right)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x+\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{\sin^2 5x}{x^2}\left(1+\cos^2 5x\right)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\times 5\right)^2\left(1+\cos^2 5x\right)}=2\times\frac{1+4}{25\times 2}=\frac{1}{5}$$ ។

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos^4 5x}=\frac{1}{5}$ ។

ព) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x^2)}{(\tan x-\sin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3\left(2x^2\right)}{\left(\tan x-\cos x\tan x\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3\left(2x^2\right)}{\left(1-\cos x\right)^2\tan^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x^2)}{4\sin^4\frac{x}{2}\tan^2 x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\times 2\right]^3}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2}=\frac{1}{4}\times\frac{2^3}{\frac{1}{16}}=32$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^3(2x^2)}{(\tan x-\sin x)^2}=32$ ។

ឈ) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos^4(2x^3)}{(3\sin x-\sin 3x)^2}=\lim_{x\to0}\dfrac{\left[1-\cos^2(2x^3)\right]\left[1+\cos^2(2x^3)\right]}{\left[3\sin x-\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)\right]^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\left(2x^3\right)\left[1+\cos^2\left(2x^3\right)\right]}{16\sin^6 x}$$

$$=\frac{1}{16}\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin\left(2x^3\right)}{2x^3}\times2\right]^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)^6\left[1+\cos^2\left(2x^3\right)\right]=\frac{1}{16}\times4\times2=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos^4(2x^3)}{(3\sin x-\sin 3x)^2}=\dfrac{1}{2}$ ។

ញ) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{1-\cos^4 3x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\left(1-\cos 2x\right)\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{\left(1-\cos^2 3x\right)\left(1+\cos^2 3x\right)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{\sin^2 3x\left(1+\cos^2 3x\right)}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\times3\right)}\frac{1+\cos 2x+\cos^2 2x}{1+\cos^2 3x}=2\times\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{1-\cos^4 3x}=\dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣១

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x\cos 6x}{\sin^2 5x}$

ខ) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}$

គ) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 6x}{1-\cos^3 2x}$

ឃ) $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 2x\ \cos 4x}{x^2}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x-\cos 6x}{3\sin^2 x+\sin^2 2x}$

ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos^3 4x}}{3x^2}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\sqrt[3]{\cos 4x}}{x^2}$

ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x\sqrt{\cos 4x}}{x^2}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x\cos 6x}{\sin^2 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)+\cos 2x(1-\cos 6x)}{\sin^2 5x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+2\cos 2x\sin^2 3x}{\sin^2 5x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2 x+\cos 2x\sin^2 3x}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 5x}{x^2}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2+\cos 2x\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\times 3\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\times 5\right)^2}=2\times\frac{1+9}{25}=\frac{4}{5}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x\cos 6x}{\sin^2 5x}=\dfrac{4}{5}$ ។

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{2\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\times 3\right)^2}=\dfrac{4}{9}$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}=\dfrac{4}{9}$ ។

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 6x}{1-\cos^3 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 6x}{2\sin^2 x\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 6x}{6x}\times 6\right)^2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{36}{3}=6$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 6x}{1-\cos^3 2x}=6$ ។

ឃ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x\ \cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos^2 2x\right)+\cos^2 2x\left(1-\cos 4x\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x+2\cos^2 2x\sin^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x\left(1+2\cos^2 2x\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2\left(1+2\cos^2 2x\right)=4\times 3=12$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x\ \cos 4x}{x^2}=12$ ។

ង) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-\cos 6x}{3\sin^2 x+\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^2 2x-(1-2\sin^2 3x)}{3\sin^2 x+\sin^2 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x-\sin^2 2x}{3\sin^2 x+\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin^2 3x-\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{3\sin^2 x+\sin^2 2x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times 3\right)^2-\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2}{3\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2}=\frac{14}{7}=2$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-\cos 6x}{3\sin^2 x+\sin^2 2x}=2$ ។

ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos^3 4x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 4x}{3x^2\left(1+\sqrt{\cos^3 4x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)\left(1+\cos 4x+\cos^2 4x\right)}{3x^2\left(1+\sqrt{\cos^3 4x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x\left(1+\cos 4x+\cos^2 4x\right)}{3x^2\left(1+\sqrt{\cos^3 4x}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2\frac{1+\cos 4x+\cos^2 4x}{1+\sqrt{\cos^3 4x}}=\frac{2}{3}\times 4\times\frac{3}{2}=4$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos^3 4x}}{3x^2}=4$ ។

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)-(1-\cos 4x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{\cos 2x}}-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2$$

$$=1-8=-7$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=-7$ ។

ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}\right)}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\times\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x}\right)} = 2\times\frac{9}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\frac{3}{2}$ ។

ឈ) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\sqrt[3]{\cos 4x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt[3]{\cos 4x}\right)-\left(1-\cos 2x\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2(1+\sqrt[3]{\cos 4x}+\sqrt[3]{\cos^2 4x})}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2\left(1+\sqrt[3]{\cos 4x}+\sqrt[3]{\cos^2 4x}\right)}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{\cos 4x}+\sqrt[3]{\cos^2 4x}\right)}-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\sqrt[3]{\cos 4x}}{x^2}=\frac{2}{3}$ ។

ញ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x\sqrt{\cos 4x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 2x\right)+\cos 2x\left(1-\sqrt{\cos 4x}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\left(1-\sqrt{\cos 4x}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\sin^2 2x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 4x}\right)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2\right)^2\frac{\cos 2x}{1+\sqrt{\cos 4x}}$$

$$=2+2\times 4\times\frac{1}{2}=2+4=6$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x\sqrt{\cos 4x}}{x^2}=6$ ។

លំហាត់ទី៣២

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sin x}{x}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{x+\tan 3x}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x....\sin(nx)}{x^n}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{x+\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\tan x}{x}}{1+\frac{\tan 3x}{3x}.3}=\frac{1+1}{1+3}=\frac{1}{2}$ ។

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[\sin(\sin x)\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left[\sin(\sin x)\right]}{\sin(\sin x)}.\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}=1$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x....\sin(nx)}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.2\frac{\sin 2x}{2x}.3\frac{\sin 3x}{3x}....n.\frac{\sin(nx)}{nx}=1\times 2\times 3\times....\times n=n!$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x....\sin(nx)}{x^n}=n!$ ។

លំហាត់ទី៣៣

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

គ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

ង. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}$

ច. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{4}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$

ជ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

ញ. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$

ដ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sin\dfrac{2\pi}{x}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$ តាង $z=1-x$ នាំឲ្យ $x=1-z$ កាលណា $x\to 1$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2})}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos\frac{\pi z}{2}}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi z}{4}}{z^2}$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi z}{4}}{(\frac{\pi z}{4})^2}\cdot\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$ ។

ខ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

តាង $z=\dfrac{\pi}{2}-x$ នាំឲ្យ $x=\dfrac{\pi}{2}-z$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-z)}{\pi^2-4(\frac{\pi}{2}-z)^2}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{\pi^2-\pi^2+4\pi z-4z^2}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{4\pi z-4z^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}.\frac{1}{4\pi-4z}=\frac{1}{4\pi}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi^2-4x^2}=\dfrac{1}{4\pi}$ ។

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

តាង $z=\dfrac{\pi}{4}-x$ នាំឲ្យ $x=\dfrac{\pi}{4}-z$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-z)-\cos(\frac{\pi}{4}-z)}{\pi-4(\frac{\pi}{4}-z)}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{(\frac{\sqrt2}{2}\cos z-\frac{\sqrt2}{2}\sin z)-(\frac{\sqrt2}{2}\cos z+\frac{\sqrt2}{2}\sin z)}{4z}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-\sqrt2\sin z}{4z}=-\frac{\sqrt2}{4}\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=-\frac{\sqrt2}{4}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=-\dfrac{\sqrt2}{4}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

តាង $z=\dfrac{\pi}{2}-x$ នាំឲ្យ $x=\dfrac{\pi}{2}-z$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin(\frac{\pi}{2}-z)}}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-z)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos z}}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2-1-\cos z}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2-1-\cos z}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{(\frac{z}{2})^2}.\frac{z^2}{\sin^2 z}.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z}}=2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}$

តាង $z=1-x$ នាំឲ្យ $x=1-z$ កាលណា $x\to 1$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(1-z)^3-1+\tan(\pi-\pi z)}{1-(1-z)^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(1-z)^3-1+\tan(\pi-\pi z)}{1-(1-z)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1-3z+3z^2-z^3-1-\tan\pi z}{1-1+2z-z^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-3z+3z^2-z^3-\tan\pi z}{2z-z^2}=\lim_{z\to0}\frac{z(-3+3z-z^2-\frac{\tan\pi z}{z})}{z(2-z)}=\frac{-3-\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}=-\frac{3+\pi}{2}$ ។

ប. $\lim_{x\to2}(4-x^2)\tan\frac{\pi x}{4}$ តាង $z=2-x$ នោះ $x=2-z$ បើ $x\to2$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}\left[4-(2-z)^2\right]\tan\frac{\pi}{4}(2-z)=\lim_{z\to0}(4z-z^2)\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{4})$$

$$=\lim_{z\to0}(4-z)\frac{\frac{\pi z}{4}}{\tan\frac{\pi z}{4}}.\frac{4}{\pi}=\frac{16}{\pi}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to2}(4-x^2)\tan\frac{\pi x}{4}=\frac{16}{\pi}$ ។

ផ. $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}$ តាង $z=\pi-x\Rightarrow x=\pi-z$ បើ $x\to\pi$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}z\tan\frac{\pi-z}{2}=\lim_{z\to0}z\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2})=\lim_{z\to0}z\cot\frac{z}{2}=2\lim_{z\to0}\frac{\frac{z}{2}}{\tan\frac{z}{2}}=2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}=2$

ព. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ តាង $z=\frac{\pi}{4}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-z$ បើ $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}\frac{1-\tan(\frac{\pi}{4}-z)}{1-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-z)}=\lim_{z\to0}\frac{1-\frac{1-\tan z}{1+\tan z}}{1-\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{1-\tan(\frac{\pi}{4}-z)}{1-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\dfrac{1-\tan z}{1+\tan z}}{1-\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin z)}=\lim_{z\to 0}\frac{2\tan z}{(1-\cos z+\sin z)(1+\tan z)}$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{\tan z}{z}}{(\dfrac{1-\cos z}{z}+\dfrac{\sin z}{z})(1+\tan z)}=2$$

ដូចនេះ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}=2$ ។

ឈ. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$ តាង $z=\dfrac{\pi}{3}-x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}-z$ បើ $x\to\dfrac{\pi}{3}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\pi-3(\dfrac{\pi}{3}-z)}{\sqrt{3}-2\sin(\dfrac{\pi}{3}-z)}=\lim_{z\to 0}\frac{3z}{\sqrt{3}-2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos z-\dfrac{1}{2}\sin z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{3z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z-\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{3}{\sqrt{3}\dfrac{1-\cos z}{z}-\dfrac{\sin z}{z}}=\frac{3}{0-1}=-3$$

ដូចនេះ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}=-3$ ។

ញ. $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$ តាង $t=\dfrac{\pi x}{x+\pi}\Rightarrow x=\dfrac{\pi t}{\pi-t}$ បើ $x\to\pi\ \Rightarrow t\to\dfrac{\pi}{2}$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\pi-\dfrac{\pi t}{\pi-t}}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\cos t}{\pi(\pi-2t)}$$

តាង $u=\dfrac{\pi}{2}-t\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}-u$ បើ $t\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\pi-\dfrac{\pi}{2}+u)\cos(\dfrac{\pi}{2}-u)}{\pi(\pi-\pi+2u)}=\lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{2}+u}{2\pi}.\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}=\dfrac{1}{4}$ ។

ដ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sin\dfrac{2\pi}{x}}$ តាង $z=\dfrac{2}{x}\Rightarrow x=\dfrac{2}{z}$ បើ $x\to 2$ នោះ $z\to 1$

$=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2-\dfrac{2}{z}}{\sin\pi z}=2\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z-1}{z.\sin\pi z}$

តាង $z=1-u\Rightarrow u=1-z$ បើ $z\to 1$ នោះ $u\to 0$

$=2\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{-u}{(1-u)\sin(\pi-\pi u)}=-2\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{1-u}.\dfrac{\pi u}{\sin\pi u}.\dfrac{1}{\pi}=-\dfrac{2}{\pi}$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sin\dfrac{2\pi}{x}}=-\dfrac{2}{\pi}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{(\pi-x)^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}$

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(\pi-4x)\cos 2x}{1-\sin 2x}$

ង. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

ច. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\pi-4x}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x+\sqrt{3}\sin x-2}{(\pi-3x)^2}$

ជ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2-\sqrt{2}(\cos x+\sin x)}{\cos^2 2x}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

ញ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{(\pi-x)^2}$

តាង $u=\pi-x$ នោះ $x=\pi-u$ កាលណា $x\to\pi$ នោះ $u\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{u}{2}\right)}{u^2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{u}{2}}{u^2}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{u}{4}}{u^2}=2\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{u}{4}}{\dfrac{u}{4}}\times\dfrac{1}{4}\right)^2=2\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{8}$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\dfrac{1}{8}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}$

តាង $u=\dfrac{\pi}{2}-x$ នោះ $x=\dfrac{\pi}{2}-u$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $u\to 0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\pi-2\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)}{\cos(\dfrac{\pi}{2}-u)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2u}{\sin u}=2$ ។

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}=2$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1}$

តាង $u=\frac{1}{2}-x$ នោះ $x=\frac{1}{2}-u$ កាលណា $x\to\frac{1}{2}$ នោះ $u\to 0$

យើងបាន $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos(\pi x)}{2x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi u\right)}{2\left(\frac{1}{2}-u\right)-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi u)}{-2u}$

$=-\frac{\pi}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}=-\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos(\pi x)}{2x-1}=-\frac{\pi}{2}$ ។

ឃ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)\cos 2x}{1-\sin 2x}$

តាង $u=\frac{\pi}{4}-x$ នោះ $x=\frac{\pi}{4}-u$ កាលណា $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $u\to 0$

យើងបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)\cos 2x}{1-\sin 2x}=\lim_{u\to 0}\frac{(\pi-\pi+4u)\cos\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{4u\sin 2u}{1-\cos 2u}=\lim_{u\to 0}\frac{8u\sin u\cos u}{2\sin^2 u}$$

$$=4\lim_{u\to 0}\left(\frac{u}{\sin u}\times\cos u\right)=4$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)\cos 2x}{1-\sin 2x}=4$ ។

ង. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

តាង $u=\frac{\pi}{3}-x$ នោះ $x=\frac{\pi}{3}-u$ កាលណា $x\to\frac{\pi}{3}$ នោះ $u\to 0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\pi-3\left(\dfrac{\pi}{3}-u\right)}{\sqrt{3}-2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-u\right)}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{3u}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos u+\sin u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{3}{\sqrt{3}\dfrac{1-\cos u}{u}+\dfrac{\sin u}{u}}=3$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}=3$

ប. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\pi-4x}$

តាង $u=\dfrac{\pi}{4}-x$ នោះ $x=\dfrac{\pi}{4}-u$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $u\to 0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\pi-4x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-u\right)-\sqrt{2}}{\pi-4\left(\dfrac{\pi}{4}-u\right)}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{2}\cos u+\sqrt{2}\sin u-\sqrt{2}}{4u}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u}-\frac{1-\cos u}{u}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\pi-4x}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ។

ឆ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x+\sqrt{3}\sin x-2}{(\pi-3x)^2}$

តាង $u=\dfrac{\pi}{3}-x$ នោះ $x=\dfrac{\pi}{3}-u$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{3}$ នោះ $u\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x+\sqrt{3}\sin x-2}{(\pi-3x)^2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-u\right)+\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-u\right)-2}{\left(\pi-\pi+3u\right)^2}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos u+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin u+\frac{3}{2}\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin u-2}{9u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2\cos u-2}{9u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{-4\sin^2\frac{u}{2}}{9u^2}$$

$$=-\frac{4}{9}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\times\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x+\sqrt{3}\sin x-2}{(\pi-3x)^2}=-\dfrac{1}{9}$ ។

ជ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2-\sqrt{2}\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos^2 2x}$

តាង $u=\dfrac{\pi}{4}-x$ នោះ $x=\dfrac{\pi}{4}-u$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $u\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2-\sqrt{2}\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos^2 2x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2-\sqrt{2}\left[\cos(\frac{\pi}{4}-u)+\sin(\frac{\pi}{4}-u)\right]}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2u\right)}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2-2\cos u}{\sin^2 2u}=\lim_{u\to 0}\frac{4\sin^2\frac{u}{2}}{\sin^2 2u}=4\lim_{u\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\times\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2u}{\sin 2u}\times\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2-\sqrt{2}\left(\cos x+\sin x\right)}{\cos^2 2x}=\dfrac{1}{4}$ ។

ឈ. $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

តាង $u=1-x$ នោះ $x=1-u$ កាលណា $x\to 1$ នោះ $u\to 0$

យើងបាន $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{u\to 0}\left[\left(1-(1-u)^2\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right)\right]$

$$=\lim_{u\to 0}\left[u(2-u)cot\frac{\pi u}{2}\right]$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{\frac{\pi u}{2}}{\tan\frac{\pi u}{2}}(2-u)\times\frac{2}{\pi}\right]=\frac{4}{\pi}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{4}{\pi}$ ។

ញ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]$

តាង $u=\frac{\pi}{2}-x$ នោះ $x=\frac{\pi}{2}-u$ កាលណា $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $u\to 0$

យើងបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=\lim_{u\to 0}\left[(\pi-\pi+2u)\tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]$

$$=\lim_{u\to 0}\left[2u\cot u\right]=2\lim_{u\to 0}\left(\frac{u}{\tan u}\right)=2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=2$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+1}{2x^3+x+3}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+1)(6x^3+x)}{(3x+1)(8x^4+5)}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-7x^2+x+3}{6x^3+x^2-5x+1}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}+(x+1)^{10}+\ldots+(x+10)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}+(x+1)^{100}+....+(x+100)^{100}}{x^{100}+100^{100}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+3}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+4x+1}+x+2}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+1}{\sqrt[3]{x^3+4x}+\sqrt[3]{27x^3+9x+1}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+1}{2x^3+x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3})}{x^3(2+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})}$

$$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\dfrac{4}{2}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2+1)(6x^3+x)}{(3x+1)(8x^4+5)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(4+\frac{1}{x^2})x^3(6+\frac{1}{x^2})}{x(3+\frac{1}{x})x^4(8+\frac{5}{x^4})}$

$$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(4+\frac{1}{x^2})(6+\frac{1}{x^2})}{(3+\frac{1}{x})(8+\frac{5}{x^4})}=\dfrac{4\times6}{3\times8}=1$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-7x^2+x+3}{6x^3+x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(4-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})}{x^3(6+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3})}$

$$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})}{6+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-7x^2+x+3}{6x^3+x^2-5x+1}=\frac{2}{3}$ ។

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}+(x+1)^{10}+\ldots+(x+10)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}+x^{10}(1+\frac{1}{x})^{10}+\ldots+x^{10}(1+\frac{10}{x})^{10}}{x^{10}+10^{10}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}\left[1+(1+\frac{1}{x})^{10}+\ldots.+(1+\frac{10}{x})^{10}\right]}{x^{10}\left(1+\frac{10^{10}}{x^{10}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(1+\frac{1}{x})^{10}+\ldots.+(1+\frac{10}{x})^{10}}{1+\frac{10^{10}}{x^{10}}}=\frac{1+1+\ldots.+1}{1}=11$$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{100}+(x+1)^{100}+\ldots.+(x+100)^{100}}{x^{100}+100^{100}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{100}+x^{100}(1+\frac{1}{x})^{100}+\ldots.+x^{100}(1+\frac{100}{x})^{100}}{x^{100}+100^{100}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}\left[1+(1+\frac{1}{x})^{100}+\ldots.+(1+\frac{100}{x})^{100}\right]}{x^{100}\left(1+\frac{100^{100}}{x^{100}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(1+\frac{1}{x})^{100}+\ldots.+(1+\frac{100}{x})^{100}}{1+\frac{100^{100}}{x^{100}}}=101$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{100}+(x+1)^{100}+\ldots.+(x+100)^{100}}{x^{100}+100^{100}}=101$ ។

$$6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=\sqrt{4}=2$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+3}}{x}=2$ ។

$$7)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+4x+1}+x+2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{8+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+x+2}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1+\frac{2}{x}\right)=2+1=3$$

$$8)\lim_{x\to\infty}\frac{8x+1}{\sqrt[3]{x^3+4x}+\sqrt[3]{27x^3+9x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(8+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^2}}+x\sqrt[3]{27+\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^2}}+\sqrt[3]{27+\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}=\frac{8}{1+3}=2$$

ដូច $\lim_{x\to\infty}\frac{8x+1}{\sqrt[3]{x^3+4x}+\sqrt[3]{27x^3+9x+1}}=2$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៦

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$ ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{2x+3}{x+1})$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+4x^3}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2+2x}-3x)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)x\left(2+\frac{3}{x}\right)x\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-1\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-2}{2}=-1$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}=-1$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-xe^{-x}}{2+e^{-x}}=\frac{1}{2}$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{2x+3}{x+1})=\ln 2$

ង. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+4x^3}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2+2x}-3x)=3$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2}-2\sqrt{x^2-x+3})$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2}-2\sqrt{x^2-x+3})$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x+2-4x^2+4x-12}{\sqrt{4x^2+x+2}+2\sqrt{x^2-x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-10}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5-\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{10}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2}-2\sqrt{x^2-x+3})=\frac{5}{4}$ ។

ខ. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2-x^2+x-3}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}=1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})=1$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1.2+2.3+3.4+....+(n-1)n}{n^3}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1.2+2.3+3.4+....+(n-1)n}{n^3}$

តាង $S_n=1.2+2.3+3.4+...+(n-1)n=\sum\limits_{k=2}^{n}\left[(k-1)k\right]$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)k\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)-\sum_{k=1}^{n}(k)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)\left[(2n+1)-3\right]}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1.2+2.3+3.4+....+(n-1)n}{n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3n^3}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1.2+2.3+3.4+....+(n-1)n}{n^3}=\dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})....(1-\dfrac{1}{n^2})$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}})$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})....(1-\frac{1}{n^2})$

យក $A=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{n^2})=\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{3}{2}.\frac{4}{3}....\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $A=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$ ។

គណនាលីមីត ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}})$

យក $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\right)=\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+3}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$, $k\le n$ និង $n\in\mathbb{N}$ គេមាន $n^4+1\le n^4+k\le n^4+n$

គេទាញ $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

គេបាន $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)\le\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\right)\le\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}\right)$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}\le S_n\le\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$

$1\le\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\le 1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}})=1$ ។

លំហាត់ទី៤០

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេមាន

$$S_n = \frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\dots+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{p=0}^{n}\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក.គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយប្រើ $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$ ជាទម្រង់ $\frac{a}{2p+1}+\frac{b}{2p+3}$ ។

ខ.គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{(2p+3)-(2p+1)}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+3}$

យើងបាន $S_n = \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+3}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{2n+3} = \frac{2(n+1)}{2n+3}$

ខ.គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right) = 1$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+3} = 0$ ។

លំហាត់ទី៤១

ដោយប្រើសមភាព $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ ចូរគណនាផលបូក៖

$S_n = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក S_n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន $S_n = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{(k+1)!}\right]$

ដោយ $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ នោះគេបាន៖

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=1-\frac{1}{(n+1)!}$ ។

ដូចនេះ៖ $S_n=1-\frac{1}{(n+1)!}$ និង $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$ ។

លំហាត់ទី៤២

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\ln x}{1-2x+\ln x}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+x-1}{e^x+1}$

គ. $\lim_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]$

ឃ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2\ln x}{1+3\ln x}$

ង. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x+\ln x}$

ច. $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x+x-1}{e^x+x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\ln x}{1-2x+\ln x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ចែកភាគយកនិងភាគបែងនិង x គេបាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2\ln x}{x}}{\frac{1}{x}-2+\frac{\ln x}{x}}=-\frac{1}{2}$

ព្រោះ៖ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

ដូចនេះ៖ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\ln x}{1-2x+\ln x}=-\frac{1}{2}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(2+\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+xe^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}=2$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+1}=2$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x\right)-\ln\left(2e^x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x}{2e^x+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{2+e^{-x}}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]=-\ln 2$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2\ln x}{1+3\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\ln x}{3\ln x}=-\dfrac{2}{3}$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{x+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

ច. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+x}=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{e^x}=2\end{array}\right.$

លំហាត់ទី៤៣

ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+x-1}{x}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x}$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^2}$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{2x}-2}{\sin x}$

ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{3x}-1)}{x^2}$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 2x}-\cos 2x}{\tan^2 x}$

ញ. $\lim_{x\to +\infty} x(e^{\frac{2}{x}}-1)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{x}\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{2}{e^{x}}=2$ ។

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}+1\right)=1+1=2$ ។

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}+2\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]=1$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)-\left(e^{\tan x}-1\right)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{x}=1-1=0$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{ax}-1\right)-\left(e^{bx}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a-\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}\cdot b=a-b$

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{x^2e^{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^2\times\frac{1}{e^{x}}\right]=1$ ។

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{2x}-2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-1\right)+\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x}-1}{x}+2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\sin x}{x}}=3$

ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{3x}-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3=3$ ។

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\sin 2x}-\cos 2x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\sin 2x}-1+2\sin^2 x}{\tan^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{x\sin 2x}-1}{x\sin 2x}\times\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2+2\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{\dfrac{\tan^2 x}{x^2}}=4$$

ញ. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{2t}-1}{2t}\times 2=2$ ។

លំហាត់ទី៤៤

ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin 3x)}{x^2}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2\cos x-\cos 2x)}{\sin^2 x}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x)(1+2x)]}{x}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)}{x}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^x)}{x}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-2\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+4x\right)}{4x}\times 4=4$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{-3x}\left(-3\right)=-3$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x\sin 3x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x\sin 3x\right)}{x\sin 3x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$

ង. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

ច. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2\cos x-\cos 2x)}{\sin^2 x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\left(2\cos x-\cos 2x-1\right)\right]}{\left(2\cos x-\cos 2x-1\right)}\times\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-\cos 2x-1}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x\left(1-\cos x\right)}{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x}{1+\cos x}=\frac{2}{2}=1$$

ឆ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[(1+x)(1+2x)]}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}+\dfrac{\ln\left(1+2x\right)}{2x}\times 2\right]=1+2=3$

ជ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\tan x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\tan x\right)}{\tan x}\times\dfrac{\tan x}{x}=1$

ឈ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2-e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\left(1-e^x\right)\right]}{\left(1-e^x\right)}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\left(e^x-1\right)}{x}=-1$

ញ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(3-2\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+2(1-\cos x\sqrt{\cos 2x})\right]}{2(1-\cos x\sqrt{\cos 2x})}\times\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\cos x\right)+\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin^2 x}{x^2\left(1+\cos x\right)}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{2\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\right]=3$$

លំហាត់ទី៤៥

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x^3-3x+2}$

គ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\pi-4x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-4x+5)}{e^{x-2}+e^{2-x}-2}$

ច. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(4-x)-\ln 2}{x-2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$

ជ. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^2 x-3\ln x+2}{1-\ln x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x\right)}{-x}=1+1=2$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x^3-3x+2}=\dfrac{1}{3}$

គ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\pi-4x}=-\dfrac{1}{2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=-\dfrac{1}{2}$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-4x+5)}{e^{x-2}+e^{2-x}-2}=1$

ច. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(4-x)-\ln 2}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$

ជ. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^2 x-3\ln x+2}{1-\ln x}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(\ln x-1)(\ln x-2)}{1-\ln x}$

$=\lim\limits_{x\to e}\left(2-\ln x\right)=2-\ln e=2-1=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^2 x-3\ln x+2}{1-\ln x}=1$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+\sin x}-1}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin 4x}}{x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}+e^{cx}-3}{x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{x}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+4x-1}{e^{4x}-x-1}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^{4x}-2}{e^{3x}-1}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}+e^{x\sin^2 2x}-2}{x^3}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-\cos 4x}{x^2}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\tan 2x}-2+\cos 2x}{x^2}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}-2}{x^2}$

ដ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{3x}-3e^{2x}+1}{x^2}$

ឋ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{-x}-5e^{2x}+1}{x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+\sin x}-1}{2x+\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\left(2+\dfrac{\sin x}{x}\right)=2+1=3$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin 4x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-3x}-1}{-3x}(-3)-\dfrac{e^{\sin 4x}-1}{\sin 4x}\times\dfrac{\sin 4x}{4x}\times 4\right)=-7$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}+e^{cx}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a+\dfrac{e^{bx}-1}{bx}\cdot b+\dfrac{e^{cx}-1}{cx}\cdot c\right)=a+b+c$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{e^{-\sin x}-1}{-\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right]=1+1=2$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+4x-1}{e^{4x}-x-1}=2$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^{4x}-2}{e^{3x}-1}=2$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}+e^{x\sin^2 2x}-2}{x^3}=5$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-\cos 4x}{x^2}=10$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\tan 2x}-2+\cos 2x}{x^2}=0$

ញ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}-2}{x^2}=1$

ដ. $\lim_{x\to 0}\frac{2e^{3x}-3e^{2x}+1}{x^2}=3$

ឋ. $\lim_{x\to 0}\frac{4e^{-x}-5e^{2x}+1}{x}=-14$

លំហាត់ទី៤៧

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x\sin 2x}-e^{\cos 2x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\tan 2x}}{x^3}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin x}-e^{\sin 3x}}{1-\sqrt{1-x^3}}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}\cos 2x}{\tan^2 x}$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^n}$

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-e^{-x^2}\cos 4x}{x^2+1-\cos 2x}$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-x^2}-e^{\cos 4x}}{x^2}$

ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+1)^2}-e^{(x-1)^2}}{e^{x+1}-e^{1-x}}$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2-\cos 2x}-e^{1+\sin^2 3x}}{e^{1+x^2}-e^{1-x^2}}$

ញ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos 2x}-e^{\cos 4x}}{e^x+e^{-x}-2}$

ដ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+x\sin 2x}}-e^{\cos 2x}}{x^2}$

ឋ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^2 x+\cos 2x}-e^{1+\sin^2 3x}}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x\sin 2x}-e^{\cos 2x}}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos 2x}\left(e^{1+x\sin 2x-\cos 2x}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{1+x^2-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos 2x}\left(e^{x\sin 2x+2\sin^2 x}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 2x+2\sin^2 x}-1}{x\sin 2x+2\sin^2 x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x+2\sin^2 x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\left[e^{\cos 2x}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin2x+2\sin^2x}-1}{x\sin2x+2\sin^2x}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\cdot2+2\frac{\sin^2x}{x^2}\right)\times\lim_{x\to0}\left[e^{\cos2x}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)\right]$$

$$=1\times(2+2)\times2e=8e$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{e^{1+x\sin2x}-e^{\cos2x}}{\sqrt{1+x^2}-1}=8e$ ។

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin2x}-e^{\tan2x}}{x^3}=-4$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{3\sin x}-e^{\sin3x}}{1-\sqrt{1-x^3}}=8$

ឃ. $\lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}\cos2x}{\tan^2x}=1$

ង. $\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-1)\dots(e^{nx}-1)}{x^n}=n!$

ច. $\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-e^{-x^2}\cos4x}{x^2+1-\cos2x}=\frac{10}{3}$

ឆ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{1-x^2}-e^{\cos4x}}{x^2}=7e$

ជ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{(x+1)^2}-e^{(x-1)^2}}{e^{x+1}-e^{1-x}}=2$

ឈ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{2-\cos2x}-e^{1+\sin^23x}}{e^{1+x^2}-e^{1-x^2}}=-\frac{7}{2}$

ញ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos2x}-e^{\cos4x}}{e^x+e^{-x}-2}=6e$

ដ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{1+x\sin2x}}-e^{\cos2x}}{x^2}=3e$

ឋ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan^2x+\cos2x}-e^{1+\sin^23x}}{x^2}=-10e$

លំហាត់ទី៤៨

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2+2x}-e^{x^2-2x}}{x}$

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{1+x^2}}-e^{\cos2x}}{x^2}$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\sin^2x}\sqrt{\cos x}}{x^2}$

ឃ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos ax}-e^{\cos bx}}{x^2}$

ង. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin^2x}-e^{1-\sqrt{\cos2x}}}{x^2}$

ច. $\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos2x}-e^{\cos x\sqrt{\cos2x}}}{x^2}$

ឆ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3+3x^2}-e^{x^3-3x^2}}{e^{1+x^2}-e^{\cos2x}}$

ជ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\sqrt{\cos2x}}-e^{\tan^{2x}}}{x^2}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin^2 x}\cos 2x\cos 4x}{x^2}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+\sin^2 3x}-e^{\cos x\cos 3x}}{x^2}$

ត. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+3\sin 2x}-e^{2-\cos 4x}}{x^2}$

ថ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x^2)e^{x^2}}{1-e^{-x^2}\cos 2x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2+2x}-e^{x^2-2x}}{x}=4$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1+x^2}}-e^{\cos 2x}}{x^2}=\dfrac{3e}{2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin^2 x}\sqrt{\cos x}}{x^2}=\dfrac{3}{4}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos ax}-e^{\cos bx}}{x^2}=\dfrac{b^2-a^2}{2}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-e^{1-\sqrt{\cos 2x}}}{x^2}=0$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos 2x}-e^{\cos x\sqrt{\cos 2x}}}{x^2}=-\dfrac{e}{2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3+3x^2}-e^{x^3-3x^2}}{e^{1+x^2}-e^{\cos 2x}}=\dfrac{2}{e}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\sqrt{\cos 2x}}-e^{\tan^2 x}}{x^2}=0$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin^2 x}\cos 2x\cos 4x}{x^2}=9$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+\sin^2 3x}-e^{\cos x\cos 3x}}{x^2}=14e$

ត. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+3\sin 2x}-e^{2-\cos 4x}}{x^2}=\pm\infty$

ថ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x^2)e^{x^2}}{1-e^{-x^2}\cos 2x}=-\dfrac{2}{3}$

លំហាត់ទី៤៩

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x-2}{a^x-b^x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{4^x-2^x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2e^x}{x}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-(1+a^x)(1+b^x)}{x}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x}-2^{x^2}}{x^2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\tan x}-3^{-\tan x}}{x}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos 2x}-2^{\cos 4x}}{x^2}$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2^{x+3}}-\sqrt{3^{x+2}}}{x}$

ញ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{4^{\cos 2x}-2^{1+\cos 4x}}{x^2}$

ដ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$

ឋ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-2^{x^2}\cos 2x}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x-1}{x}-\dfrac{3^x-1}{x}\right)=\ln 2-\ln 3=\ln\dfrac{2}{3}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x-2}{a^x-b^x}=\dfrac{\ln(ab)}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)}$, $(\ a>0,b>0,a\neq b\ )$

គ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{4^x-2^x}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}=\log_2 3$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2e^x}{x}=2\ln\left(\dfrac{2}{e}\right)$

ង. $\lim_{x\to 0}\dfrac{4-(1+a^x)(1+b^x)}{x}=-2\ln(ab)$

ច. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x}-2^{x^2}}{x^2}=\pm\infty$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3^{\tan x}-3^{-\tan x}}{x}=2\ln 3$

ជ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos 2x}-2^{\cos 4x}}{x^2}=6\ln 2$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2^{x+3}}-\sqrt{3^{x+2}}}{x}=\dfrac{8\ln 2-9\ln 3}{6}$

ញ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{4^{\cos 2x}-2^{1+\cos 4x}}{x^2}=8\ln 2$

ដ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\ln^2 a$

ឋ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-2^{x^2}\cos 2x}{x^2}=2-\ln 2$

លំហាត់ទី៥០

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin 3x)}{x}$

គ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin 2x)}{x^2}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-2\cos 2x)}{x^2}$

ង. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 6x)}{x^2}$

ច. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)+\ln(\cos 4x)}{x^2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\sqrt{1+x^2})}{x^2}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 2-\ln(1+\cos 2x)}{2^{x^2}-1}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{\ln(\cos x)-\ln(\cos 3x)}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x\cos^3 2x)}{x^2}$

ត. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[(1+x)(1+2x)...(1+nx)\right]}{x}$

ថ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^x)}{x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{-2x}(-2)=-2$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin 3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin 3x)}{2\sin 3x}\times\dfrac{2\sin 3x}{3x}\times 3=6$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin 2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin 2x)}{x\sin 2x}\times\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2=2$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-2\cos 2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+4\sin^2 x\right)}{4\sin^2 x}\times\dfrac{4\sin^2 x}{x^2}=4$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 6x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2 3x\right)}{-2\sin^2 3x}\times\dfrac{-2\sin^2 3x}{x^2}=-18$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)+\ln(\cos 4x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)+\ln\left(1-2\sin^2 2x\right)}{x^2}=-10$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\sqrt{1+x^2})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)\right]}{\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 2-\ln(1+\cos 2x)}{2^{x^2}-1}=\dfrac{1}{\ln 2}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{\ln(\cos x)-\ln(\cos 3x)}=1$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x\cos^3 2x)}{x^2}=-\dfrac{13}{2}$

ត. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[(1+x)(1+2x)...(1+nx)\right]}{x}=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$

ថ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^x)}{x}=-1$

លំហាត់ទី៥១

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\tan x}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-2x}}$

ច. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

ជ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{(\pi-2x)^2}}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos 2x)^{\frac{1}{(\pi-x)^2}}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^x-e^{2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

ដ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

ឋ. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x\cos 2x\ldots\cos(nx))^{\frac{1}{x^2}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{-2x}{x^2+x+1}\right)\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{2}{3}}$$

ខ. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

គ. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\tan x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right]^{\frac{x}{x-\tan x}}=\frac{1}{e}$$

$$\text{ឃ}.\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\left[1+\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{1-x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ង}.\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-2x}}=\lim_{x\to 1}\left[1+\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]^{\frac{2}{x(x-2)}}=e$$

$$\text{ច}.\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\text{ឆ}.\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{e^x+e^{2x}-2}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{ជ}.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{(\pi-2x)^2}}=e^{-\frac{1}{8}}$$

$$\text{ឈ}.\lim_{x\to\pi}(\cos 2x)^{\frac{1}{(\pi-x)^2}}=\lim_{x\to\pi}\left(1-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{(\pi-x)^2}}=e^{-2}$$

$$\text{ញ}.\lim_{x\to 0}\left(2e^x-e^{2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[1-\left(e^x-1\right)^2\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\text{ត}.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\text{ថ}.\lim_{x\to 0}\left(\cos x\cos 2x\ldots\cos(nx)\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(e\right)^{-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}}$$

លំហាត់ទី៥២

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$\text{ក}.\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\qquad\text{ខ}.\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{គ}.\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{x-1}}\qquad\text{ឃ}.\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{x}{x-2}}$$

ង. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

ច. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3+2n^2}$

ឆ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{n}$

ជ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1}$

ឈ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$

ញ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x(x+2)}{x^2+1}\right)^{x}$

ត. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x(x+1)}\right)^{x}$

ថ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{e^x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(e\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}$

គ. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]^{\frac{x}{x-1}}=\sqrt[3]{e}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to2}\left(x-1\right)^{\frac{x}{x-2}}=\lim\limits_{x\to2}\left[1+\left(x-2\right)\right]^{\frac{x}{x-2}}=e^2$

ង. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{x}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

ច. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3+2n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-2\sin^2\frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}=0$

ឆ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{2n}{n^2-n+1}\right)\right]^{n}=e^2$

ជ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{2}{2n+1}\right)\right]^{n+1}=e$

ឈ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}=\sqrt{ab}$

ញ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x(x+2)}{x^2+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{2x-1}{x^2+1}\right)\right]^{x}=e^2$

ត. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x(x+1)}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{1-x}{x(x+1)}\right)\right]^{x}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

ថ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{-2}{e^x+1}\right)\right]^{e^x}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}$

ដែល $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ ។ ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}=1+\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}-1\right)=1+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k{}^x-1\right)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k{}^x-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\left(e\right)^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k{}^x-1}{x}\right)}$

$$=\left(e\right)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\ln(a_k)\right]}=\left(e\right)^{\ln\left(\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}\right)}=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots.a_n}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+ax}-e^{3x^2-ax}}{x-1}=b$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a និង b

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+ax}-e^{3x^2-ax}}{x-1}=b \quad (1)$

ត្រូវឲ្យអង្គទីមួយមានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$ នោះ $x=1$ ជាឫសនៃ $e^{x^2+ax}-e^{3x^2-ax}=0$

គេបាន $e^{1+a}-e^{3-a}=0 \Leftrightarrow e^{3-a}\left(e^{2a-2}-1\right)=0$ គេទាញ $e^{2a-2}=1$ នោះ $a=1$

យក $a=1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{3x^2-x}}{x-1}=b$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $b=-2e^2$ ។ ដូចនេះ $a=1,\, b=-2e^2$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+2\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}+2\right)=1+2=3$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=3$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{4x}$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}(x)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x.e\right) = +\infty$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{4x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)^2\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)^2 = 0$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}}\right]^n = e^n$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}, (a>0\;\&\; b<0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ តាង $x=t^{mn}$ ហើយកាលណា $x\to1$ នោះ $t\to1$

គេបាន $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} = \lim\limits_{t\to1}\frac{t^m-1}{t^n-1} = \lim\limits_{t\to1}\frac{(t-1)(t^{m-1}+\ldots+t+1)}{(t-1)(t^{n-1}+\ldots+t+1)}$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^{m-1}+....+t+1}{t^{n-1}+....+t+1}=\frac{m}{n}$$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\frac{m}{n}$ ។

ខ. $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, $(a>0\ \&\ b<0)$ ។

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-b-a+b}{(x-a)(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b})}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$ ។

លំហាត់ទី៥៨

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

គ. $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{|x|}$

ឃ. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-x+1-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{1+x-1+x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-x+1}+1}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+1}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$$

$$=\frac{0-1}{\sqrt{0^2-0+1}+1}\times\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}=\frac{-1}{2}\times\frac{2}{2}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2}$ ។

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\frac{1}{x})\ x(2+\frac{3}{x})\ x(\frac{2}{x}-1)}{x^2(1+\frac{1}{x^2})\ x(2+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})\ (2+\frac{3}{x})\ (\frac{2}{x}-1)}{(1+\frac{1}{x^2})\ (2+\frac{1}{x})}=\frac{1\times 2\times(-1)}{1\times 2}=-1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}=-1$ ។

គ. $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ដោយ $x\to 0^-$ នោះ $|x|=-x$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}\left(x+1\right)=-(0+1)=-1 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|}=-1$ ។

ឃ. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+8x-1-x^2+3}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+2}{-x\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(8+\frac{2}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{8+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=-\frac{8+0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0}}=-\frac{8}{2}=-4$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)=-4$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin3x}{\sin^2 5x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

ង. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

ច. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin3x}{\sin^2 5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin3x}{3x}\times3}{\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2}\times5^2}=\dfrac{3}{25}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$ ដោយ $\sin x=\tan x\cos x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\tan^3 x\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x(1-\cos^3 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^3 x(1+\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}(1+\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{\sin x(1+\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}=\left[\begin{array}{l}-\infty\ ,\ x\to 0^-\\ +\infty\ ,x\to 0^+\end{array}\right.$$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$ តាង $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-t$

កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\frac{1}{2}$ ។

ង. $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}$ រាងមិនកំណត់ $\infty\times 0$ តាង $t=\frac{1}{x}$ កាលណា $x\to\pm\infty$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ ។

ច. $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ រាងមិនកំណត់ $0\times\infty$ តាង $t=\frac{1}{x}$ កាលណា $x\to+\infty$

នោះ $t\to 0$ គេបាន $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$　　ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$

គ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$)

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$　　ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x-1)(2\sin x-1)}{(2\sin x-1)(2\sin x+1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-1}{2\sin x+1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1+1}=-\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}=-\dfrac{1}{4}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1^2}=\frac{3}{2}$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{3}{2}$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$ $\quad(a\neq 0\ ,\ b\neq 0\ ,\ a\neq b\quad)$

គេមាន $\sin ax-\sin bx=2\sin\dfrac{(a-b)x}{2}\cos\dfrac{(a+b)x}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{2\sin\dfrac{(a-b)x}{2}\cos\dfrac{(a+b)x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(a-b)x}{2}}{\sin\dfrac{(a-b)x}{2}}\times\frac{1}{\cos\dfrac{(a+b)x}{2}}=1$$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}{1+x\sin x-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}{x\sin x+\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}{x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}\times\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=1$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+3x-x^2-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}-1\right)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)=\dfrac{1}{2}$ ។

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})=3\times 1\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x}{x^3-8} & \text{បើ } x\neq 2\\[2mm] \dfrac{2}{3} & \text{បើ } x=2\end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=2$

តាមសម្មតិកម្ម $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x}{x^3-8} & \text{បើ } x\neq 2\\[2mm] \dfrac{2}{3} & \text{បើ } x=2\end{cases}$

គេមាន $f(2)=\dfrac{2}{3}$ កំណត់

គណនា $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\left(x^2-4\right)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x+2)}{x^2+2x+4}=\frac{2(2+2)}{4+4+4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=\dfrac{2}{3}$ នោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

លំហាត់ទី៦២

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់លើ $\mathbb{R}$ ៖

ក. $f(x)=\begin{cases}-2x+a & \text{បើ } x\le 1\\ \log_3 x & \text{បើ } x>1\end{cases}$ ខ. $f(x)=\begin{cases}a & \text{បើ } x\le 0\\ x\sin\frac{1}{x} & \text{បើ } x>0\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់លើ $\mathbb{R}$ ៖

ក. $f(x)=\begin{cases}-2x+a & \text{បើ } x\le 1\\ \log_3 x & \text{បើ } x>1\end{cases}$

អនុគមន៍ f ជាប់គ្រប់ $x\le 1$ និង f ជាប់គ្រប់ $x>1$ ។

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

គេត្រូវឲ្យ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 1^-}(-2x+a)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\log_3 x)$ នោះ $-2+a=0$ ឬ $a=2$ ។

ដូចនេះ $a=2$ ។

ខ. $f(x)=\begin{cases}a & \text{បើ } x\le 0\\ x\sin\frac{1}{x} & \text{បើ } x>0\end{cases}$

អនុគមន៍ $f(x)=a$ ជាប់គ្រប់ $x\le 0$ និង $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ ជាប់គ្រប់ $x>0$ ។

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ពេលគឺ

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=a$

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

តាង $x = \frac{1}{t}$ ហើយ $x \to 0^+$ នោះ $t \to +\infty$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to +\infty}\frac{\sin t}{t}$

ដោយ $\forall t > 0 : -1 \le \sin t \le 1$ នោះ $-\frac{1}{t} \le \frac{\sin t}{t} \le \frac{1}{t}$

គេទាញបាន $\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{\sin t}{t} = 0$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ ។

ដូចនេះ $a = 0$ ។

លំហាត់ទី៦៣

រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

ក. $f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{បើ} \quad x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{បើ} \quad x \ge 2 \end{cases}$

ខ. $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{បើ} \quad x < 4 \\ Ax^2 + 2x - 3 & \text{បើ} \quad x \ge 4 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

ក. $f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{បើ} \quad x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{បើ} \quad x \ge 2 \end{cases}$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 2^-}(Ax - 3) = \lim\limits_{x\to 2^+}(3 - x + 2x^2)$

$$2A-3=3-2+8$$
$$2A-3=9\Rightarrow A=6$$

ដូចនេះ $A=6$ ។

ខ. $f(x)=\begin{cases}1-3x & \text{បើ } x<4\\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x\geq 4\end{cases}$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=f(4)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 4^-}(1-3x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(Ax^2+2x-3)$

$$1-12=16A+8-3$$
$$-11=16A+5\Rightarrow A=-1$$

ដូចនេះ $A=-1$ ។

លំហាត់ទី៦៤

រកតម្លៃ A និង Bដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$f(x)=\begin{cases}Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1\\ B & \text{បើ } x=1\\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1\end{cases}$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ A និង B

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែឲ្យ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1^-}(Ax^2+5x-9)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)(A-2x)=B$

$$A+5-9=2(A-2)=B$$

$$A-4=2A-4=B$$

គេទាញ $A=0$, $B=-4$ ។ ដូចនេះ $A=0$, $B=-4$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ 3 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=0$

តាមសម្មតិកម្ម $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ 3 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

គេមាន $f(0)=3$ កំណត់

គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{x^2}+\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+2\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=1+2=3$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=3$ នោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3} & \text{បើ } x\neq 0\\ 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=0$

តាមសម្មតិកម្ម $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3} & \text{បើ } x\neq 0\\ 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

គេមាន $f(0)=1$ កំណត់

គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3(1+\cos x)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\times\frac{1}{1+\cos x}=2\times 1^3\times\frac{1}{2}=1$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$ នោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos ax}{x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ \dfrac{1}{8} & \text{បើ } x=0\end{cases}$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a

យើងមាន $f(0)=\frac{1}{8}$

ហើយ $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{x^2(1+\cos ax)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 ax}{x^2(1+\cos ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{x^2(1+\cos ax)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{(ax)^2}\times\frac{a^2}{1+\cos ax}=\frac{a^2}{2}$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\frac{1}{8}$

គេទាញ $\frac{a^2}{2}=\frac{1}{8}$ នោះ $a=\pm\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $a=\pm\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{1+x} & \text{បើ } x\geq 0\\ \frac{2\sqrt{x^2}-\sin x}{x} & \text{បើ } x<0\end{cases}$

តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$

គេមាន $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1+x} & \text{បើ } x\geq 0\\ \dfrac{2\sqrt{x^2}-\sin x}{x} & \text{បើ } x<0\end{cases}$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$ កំណត់

ហើយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x}{1+x}=1$

និង $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\sqrt{x^2}-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2|x|-\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-2-\frac{\sin x}{x})=-3$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ គ្មានលីមីត ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\pi & \text{បើ } x=0\\ \dfrac{\sin \pi x}{x-x^4} & \text{បើ } 0<x<1\\ \dfrac{\pi}{3} & \text{បើ } x=1\end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $[0,1]$

យើងពិនិត្យឃើញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(0,1)$ ។

គេមាន $f(0)=\pi$ និង $f(1)=\frac{\pi}{3}$

ហើយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\pi x}{x-x^4}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\pi x}{\pi x}\times\frac{\pi}{1-x^3}=\pi=f(0)$

និង

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin\pi x}{x(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin\pi(1-x)}{\pi(1-x)}\times\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi}{x\left(1+x+x^2\right)}$$

តាង $\pi\left(1-x\right)=t$ នោះ $x=1-t$

ហើយកាលណា $x\to 1^-$ នោះ $t\to 0^+$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi}{x\left(1+x+x^2\right)}=\frac{\pi}{3}=f(1)$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

លំហាត់ទី៧០

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sin x+x^2\ln|x|}{x}$ ដែល $x\neq 0$ ។

តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

បើមានចូរកំណត់រកអនុគមន៍នោះ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\ln|x|}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\ln|x|\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}(x\ln|x|)=1+0=1$$

ដូចនេះ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x=0$ ហើយបើ g ជាបន្លាយនៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=0$ នោះគេបាន ៖

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x + x^2 \ln|x|}{x} & \text{បើ} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{បើ} \quad x=0 \end{cases}$$

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ ហើយលេខមេគុណ a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $2a+3b+6c=0$ ។

បង្ហាញថាសមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

តាង $f(x)=ax^2+bx+c$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ ។

យើងមាន $f(0)=c$ និង $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4a}{9}+\dfrac{2b}{3}+c=\dfrac{2(2a+3b)+9c}{9}$

$$=\frac{-12c+9c}{9}=-\frac{c}{3}$$

យើងបាន $f(0)f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{c^2}{3}<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន $x_0\in\left[0\ ,\dfrac{2}{3}\right]$ ដែល $f(x_0)=0$ ។

ដូចនេះសមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$ ។

លំហាត់ទី៧២

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសជាចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x) = x\tan x - \cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ។

គេមាន $f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$

និង $f(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3.14 - 2\times 1.41}{4} = \dfrac{0.32}{4} = 0.80 > 0$

គេបាន $f(0).f(\frac{\pi}{4}) < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c មួយនៃចន្លោះ $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

ដូចនេះថាសមីការ $x\tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសជាចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{\cos \pi x}{1 - 2x}$ ដែល $x \neq \dfrac{1}{2}$

ក.ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ ។

ខ.តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប ត្រង់ $x = \dfrac{1}{2}$ ឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\cos \pi x}{1-2x}$ តាង $x = \dfrac{1}{2} - u$ ហើយបើ $x \to \dfrac{1}{2}$ នោះ $u \to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi u\right)}{1-2\left(\dfrac{1}{2}-u\right)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin \pi u}{2u} = \dfrac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ។

ខ.តើ f អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x = \dfrac{1}{2}$ ឬទេ ?

យើងមាន $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ នោះគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឲ្យជាប់ត្រង់ $x = \dfrac{1}{2}$ បាន

ហើយបើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = \dfrac{1}{2}$ នោះគេបាន៖

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos \pi x}{1-2x} & \text{បើ } x \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{បើ } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{e^{3\sin x} - e^{\sin 3x}}{x^3}$ ដែល $x \neq 0$ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ រួចទាញរកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3\sin x} - e^{\sin 3x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x}\left(e^{3\sin x - \sin 3x} - 1\right)}{x^3}$

ដោយ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ នោះ $3\sin x - \sin 3x = 4\sin^3 x$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x}\left(e^{4\sin^3 x} - 1\right)}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{4\sin^3 x} - 1}{4\sin^3 x} \times \frac{\sin^3 x}{x^3} \times 4e^{\sin 3x} = 4$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$ ។

ទាញរកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 0$

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 0$ នោះគេបាន៖

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3\sin x} - e^{\sin 3x}}{x^3} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 4 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យសមីការ $(E):\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ដែល $a \neq 0, a, b, c, d \in \Re$

បើ $|b+d| < |a+c|$ ចូរស្រាយថាសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅចន្លោះ -1 និង 1 ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅចន្លោះ -1 និង 1

តាង $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ជាអនុគមន៍ជាប់ជានិច្ច។

គេមាន $f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = (b+d) - (a+c)$

ហើយ $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = (b+d) + (a+c)$

យើងបាន $f(-1)f(1) = (b+d)^2 - (a+c)^2 = |b+d|^2 - |a+c|^2$

ដោយ $|b+d| < |a+c|$)(បម្រាប់) នោះ $f(-1)f(1) < 0$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួន $c\in(-1,1)$ ដែល $f(c)=0$

ដូចនេះ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅចន្លោះ -1 និង 1 ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}$ ដែល $x\neq 0$ ។

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}$ ដែល $x\neq 0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(x-1+\sqrt{1+x^2}\right)\right]}{\left(x-1+\sqrt{1+x^2}\right)}\times\lim_{x\to 0}\frac{x-1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=1$$

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ នោះគេបាន៖

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x} & \text{បើ } x\neq 0\\[2ex] 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

លំហាត់ទី៧៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}(ax+1)^2 & \text{បើ } x\le 2\\ x^2+ax+3 & \text{បើ } x>2\end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+1)^2=(2a+1)^2=4a^2+4a+1=f(2)$

និង $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+ax+3\right)=4+2a+3=2a+7$

គេបាន $4a^2+4a+1=2a+7$ ឬ $4a^2+2a-6=0$

គេទាញឫស $a_1=1$, $a_2=-\dfrac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ $a_1=1$, $a_2=-\dfrac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧៨

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}2\cos 2x & \text{បើ } x\le \dfrac{\pi}{6}\\ a\sin x+b & \text{បើ } \dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos 2x & \text{បើ } x\ge \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែនិងគ្រាន់ឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=\frac{\pi}{6}$ និង $x=\frac{\pi}{2}$

ពេលគឺ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^-} (2\cos 2x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+} (a\sin x + b) \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (a\sin x + b) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\cos 2x) \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}a + b \\ a + b = -1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a + 2b = 2 \\ a + b = -1 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=-4$, $b=3$ ។

លំហាត់ទី៧៩

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{បើ } x \le 1 \\ a\ln x + b & \text{បើ } 1 < x \le e \\ 2\ln x & \text{បើ } x > e \end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{បើ } x\le 1 \\ a\ln x+b & \text{បើ } 1<x\le e \\ 2\ln x & \text{បើ } x>e \end{cases}$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែនិងគ្រាន់ឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ និង $x=e$

ពេលគឺ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(1) \\ \lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=f(e) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-2x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(a\ln x+b\right) \\ \lim\limits_{x\to e^-}\left(a\ln x+b\right)=\lim\limits_{x\to e^+}\left(2\ln x\right) \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} -1=b \\ a+b=2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} b=-1 \\ a=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $a=3$, $b=-1$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{បើ } x=-1 \\ \dfrac{\sin \pi x}{1-x^2} & \text{បើ } -1<x<1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{បើ } x=1 \end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[-1,1]$។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[-1,1]$

គេមាន $f(-1)=-\frac{\pi}{2}$ និង $f(1)=\frac{\pi}{2}$

អនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x^2}$ ជាប់លើចន្លោះបើក $(-1,1)$ ។

យើងមាន $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{\sin\pi x}{1-x^2}$ យក $x=-1-u$

កាលណា $x\to-1^+$ នោះ $u\to0^-$

គេបាន $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{u\to0^-}\frac{\sin(-\pi-\pi u)}{1-(-1-u)^2}=\lim\limits_{u\to0^-}\frac{\sin\pi u}{u(-2-u)}=-\frac{\pi}{2}=f(-1)$

ហើយ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin\pi x}{1-x^2}$ យក $x=1-u$

កាលណា $x\to1^-$ នោះ $u\to0^+$

គេបាន $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\sin(\pi-\pi u)}{1-(1-u)^2}=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\sin\pi u}{u(2-u)}=\frac{\pi}{2}=f(1)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)$ និង $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[-1,1]$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{បើ } x<-1 \\ x^3+ax^2+bx+a & \text{បើ } -1\le x\le 1 \\ 3+\frac{4}{x} & \text{បើ } x>1 \end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{បើ } x<-1 \\ x^3+ax^2+bx+a & \text{បើ } -1\le x\le 1 \\ 3+\dfrac{4}{x} & \text{បើ } x>1 \end{cases}$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែនិងគ្រាន់ឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=-1$ និង $x=1$

ពោលគឺ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} x^2=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^3+ax^2+bx+a\right) \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+ax^2+bx+a\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3+\dfrac{4}{x}\right) \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 1=-1+a-b+a \\ 1+a+b+a=7 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} 2a-b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=2$, $b=2$ ។

ដូចនេះ $a=2$, $b=2$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឲ្យសមីការ $(E): ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

គេដឹងថា $10a+3b+c=0$ ។ ចូរស្រាយថាសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិត

នៅក្នុងចន្លោះចំនួន 2 និង 4 ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះចំនួន 2 និង 4

យើងយក $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

យើងមាន $f(2)=4a+2b+c$ និង $f(4)=16a+4b+c$

ដោយ $10a+3b+c=0$ នោះ $c=-10a-3b$

យើងបាន $f(2)=4a+2b-10a-3b=-(6a+b)$

ហើយ $f(4)=16a+4b-10a-3b=6a+b$

យើងមាន $f(2)f(4)=-(6a+b)^2<0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាង

ហោចណាស់មានចំនួនពិត $x_0\in[2,4]$ ដែល $f(x_0)=0$ ។

ដូចនេះសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះចំនួន 2 និង 4 ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យសមីការ $(E): ax^3+bx^2+cx+d=0$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ។

បើ $9a+5b+3c+2d=0$ និង $7a+3b+c\neq 0$ ចូរស្រាយថាសមីការ (E)

មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះចំនួន 1 និង 2 ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះចំនួន 1 និង 2

តាង $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ។

យើងមាន $f(1)=a+b+c+d$ និង $f(2)=8a+4b+2c+d$

ដោយ $9a+5b+3c+2d=0$ នោះ $d=-\frac{9}{2}a-\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}c$

គេបាន $f(1)=a+b+c-\frac{9}{2}a-\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}c=-\frac{1}{2}(7a+3b+c)$

និង $f(2)=8a+4b+2c-\frac{9}{2}a-\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}c=\frac{1}{2}(7a+3b+c)$

គេទាញបាន $f(-1)f(1)=-\frac{1}{4}(7a+3b+c)^2<0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ

តម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត $x_0\in[1,2]$ដែល $f(x_0)=0$ ។

ដូចនេះសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះចំនួន 1 និង 2 ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឲ្យសមីការ $(E): x^4+x^3\cos\varphi-(2-\sin 2\varphi)x^2+x\cos\varphi+1=0$

ដែល $\varphi\in\mathbb{R}$ ។

ចូរស្រាយថាសមីការ (E) មានឫសជាចំនួនពិតយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ -1 និង 1 ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាសមីការ (E) មានឫសជាចំនួនពិតយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ -1 និង 1

តាង $f(x)=x^4+x^3\cos\varphi-(2-\sin 2\varphi)x^2+x\cos\varphi+1$

f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[-1,1]$ ។

គេមាន $f(-1)=1-\cos\varphi-2+\sin 2\varphi-\cos\varphi+1=\sin 2\varphi-2\cos\varphi$

និង $f(1)=1+\cos\varphi-2+\sin 2\varphi+\cos\varphi+1=\sin 2\varphi+2\cos\varphi$

គេបាន $f(-1)f(1)=(\sin 2\varphi-2\cos\varphi)(\sin 2\varphi+2\cos\varphi)$

$$= \sin^2 2\varphi - 4\cos^2\varphi = 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi$$
$$= 4\cos^2\varphi\left(\sin^2\varphi - 1\right) = -4\cos^4\varphi$$

ដោយ $f(-1)f(1) = -4\cos^4\varphi \le 0$ ចំពោះគ្រប់ $\varphi \in \mathbb{R}$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ

តម្លៃកណ្តាលបញ្ជាក់ថាមាន $x_0 \in [-1,1]$ ដែល $f(x_0) = 0$ ។

ដូចនេះសមីការ (E) មានឫសជាចំនួនពិតយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ -1 និង 1 ។

លំហាត់ទី៨៥

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ m និង n ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមានពីរដែលគេឲ្យ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x) = \dfrac{m\,f(a) + n\,f(b)}{m+n}$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាសមីការ $f(x) = \dfrac{m\,f(a)+n\,f(b)}{m+n}$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ៖

យើងយក $g(x) = f(x) - \dfrac{m\,f(a)+n\,f(b)}{m+n}$ កំណត់ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

យើងមាន $g(a) = f(a) - \dfrac{m\,f(a)+n\,f(b)}{m+n} = \dfrac{n}{m+n}\left[f(a) - f(b)\right]$

ហើយ $g(b) = f(b) - \dfrac{m\,f(a)+n\,f(b)}{m+n} = \dfrac{m}{m+n}\left[f(b) - f(a)\right]$

យើងបាន $g(a)g(b) = -\dfrac{mn}{(m+n)^2}\left[f(a) - f(b)\right]^2 < 0$ ព្រោះ $m,n > 0$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាមាន $c \in [a,b]$ ដែល $g(c) = 0$

សមមូល $f(c)=\dfrac{m\,f(a)+n\,f(b)}{m+n}$ ។

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=\dfrac{m\,f(a)+n\,f(b)}{m+n}$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឲ្យសមីការ $(E): x^2+5x-1+3\cos\theta+4\sin\theta=0$ ដែល $\theta\in\mathbb{R}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ (E) មានឫសយ៉ាងតិចមួយស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$

តាង $f(x)=x^2+5x-1+3\cos\theta+4\sin\theta$ ជាប់លើ $[-1,1]$

យើងមាន $f(-1)=1-5-1+3\cos\theta+4\sin\theta=3\cos\theta+4\sin\theta-5$

និង $f(1)=1+5-1+3\cos\theta+4\sin\theta=\cos\theta+4\sin\theta+5$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f(-1)\,f(1)&=(3\cos\theta+4\sin\theta)^2-25\\ &=(3\cos\theta+4\sin\theta)^2-25(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ &=-16\cos^2\theta+24\cos\theta\sin\theta-9\sin^2\theta\\ &=-(4\cos\theta-3\sin\theta)^2 \end{aligned}$$

ដោយ $f(-1)\,f(1)=-(4\cos\theta-3\sin\theta)^2\le 0$ ចំពោះគ្រប់ $\theta\in\mathbb{R}$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបញ្ជាក់ថាមាន $x_0\in[-1,1]$ ដែល $f(x_0)=0$ ។

ដូចនេះសមីការ (E) មានឫសជាចំនួនពិតយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ -1 និង 1 ។

លំហាត់ទី៨៧

ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បង្ហាញថា អនុគមន៍ខាងក្រោមមានចំនួន c ក្នុងចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x)=x^2+x-1\ \ ,[0,5]\ ,f(c)=11$ ។

ខ. $f(x)=x^2-6x+8\ ,[0\ ,3\ ],\ f(c)=0$ ។

គ. $f(x)=x^3-x^2+x-2\ \ ,[0,3\ ]\ ,f(c)=4$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}\ \ ,\ [\ \dfrac{5}{2}\ ,4\ ]\ ,f(c)=6$

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

ក. $f(x)=x^2+x-1\ \ ,[0,5]\ ,f(c)=11$ ។

គេមាន $f(0)=-1$ និង $f(5)=25+5-1=29$

ដោយ $f(0)=-1<f(c)=11<f(5)=29$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[0,5]$ដែល $f(c)=11$ ។

ខ. $f(x)=x^2-6x+8\ ,[0\ ,3\ ],\ f(c)=0$ ។

គេមាន $f(0)=8$ និង $f(3)=9-18+8=-1$

ដោយ $f(3)=-1<f(c)=0<f(0)=8$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[0,3]$ដែល $f(c)=0$ ។

គ. $f(x)=x^3-x^2+x-2$, $[0,3]$, $f(c)=4$ ។

គេមាន $f(0)=-2$ និង $f(3)=27-9+3-2=19$

ដោយ $f(0)=-2<f(c)=4<f(3)=19$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[0,3]$ដែល $f(c)=4$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$, $[\dfrac{5}{2},4]$, $f(c)=6$

គេមាន $f(\dfrac{5}{2})=\dfrac{\dfrac{25}{4}+\dfrac{5}{2}}{\dfrac{5}{2}-1}=\dfrac{\dfrac{35}{4}}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{35}{6}$ និង $f(4)=\dfrac{16+4}{4-1}=\dfrac{20}{3}$

ដោយ $f(\dfrac{5}{2})=\dfrac{35}{6}<f(c)=6<f(4)=\dfrac{20}{3}$ ។

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[\dfrac{5}{2},4]$ ដែល $f(c)=6$ ។

លំហាត់ទី៨៨

ចូរកំណត់ចំនួនថេរ a ដើម្បីឱ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរហើយកំណត់លីមីតនេះផង ។

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

គ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនថេរ a

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=1$ ជាឫសសមីការ៖

$\sqrt{x+3}-a=0$ នោះគេបាន $\sqrt{1+3}-a=0 \Rightarrow a=2$ ។

ចំពោះ $a=2$ គេបាន៖

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$ ។

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=0$ ជាឫសសមីការ៖

$\sqrt{1+3x}+a=0$ គេបាន $\sqrt{1+3(0)}+a=0 \Rightarrow a=-1$ ។

ចំពោះ $a=-1$ គេបាន៖

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1}=\frac{3}{2}$$

គ. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=2$ ជាឫសសមីការ៖

$\sqrt{x+a}-1=0$ គេបាន $\sqrt{2+a}-1=0 \Rightarrow a=-1$ ។

ចំពោះ $a=-1$ គេបាន៖

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

ឃ. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=-1$ ជាឫសសមីការ៖

$\sqrt{x^2+ax}-1=0$ គេបាន $\sqrt{1-a}-1=0 \Rightarrow a=0$ ។

ចំពោះ $a=0$ គេបាន៖

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{|x|-1}{(|x|-1)(|x|+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ដែល ៖

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x\neq 0\\ \sqrt{2} & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

តើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ត្រង់ $x=0$

យើងមាន $f(0)=\sqrt{2}$

ហើយ $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{\sin x}\right)$

$$=\left[\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\left(\sin x-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}\\ \lim_{x\to 0^+}\left(\sin x+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

គេបាន f គ្មានលីមីតកាលណា $x\to 0$ ។

ដូចនេះ f ពុំមែនជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ទេ។

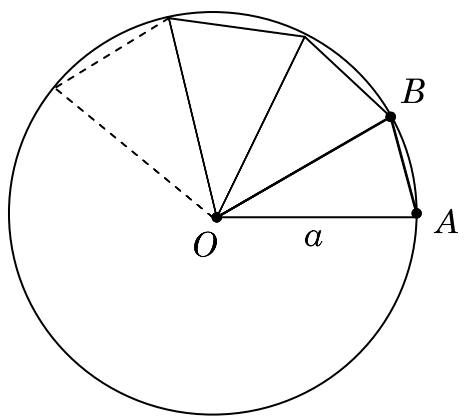
លំហាត់ទី៩០

គេមានពហុកោណនិយ័តមាន n ជ្រុងចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំស្មើនឹង a ។

តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ។ គណនា S_n រួចកំណត់ $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា S_n រួចកំណត់ $\lim_{n\to+\infty} S_n$



.មុំផ្ចិតរបស់ពហុកោណ $\phi_n = \dfrac{2\pi}{n}$

.ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ OAB គឺ $S_{OAB} = \dfrac{1}{2} OA \times OB.\sin\phi n = \dfrac{1}{2}a^2 \sin\dfrac{2\pi}{n}$ ។

.ក្រឡាផ្ទៃរបស់ពហុកោណនិយ័ត n ជ្រុងកំណត់ដោយ $S_n = n \times S_{OAB} = \dfrac{1}{2}a^2 n \sin\dfrac{2\pi}{n}$

នោះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}a^2 n\sin\dfrac{2\pi}{n} = \pi a^2 \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi a^2$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pi a^2$ ។

លំហាត់ទី៩១

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$

ង. $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

ច. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\ln(x^2+1)$

ឆ. $\lim\limits_{x\to-4}x\ln\left(4-3x-x^2\right)$

ជ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)$

គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+xe^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)+\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$)

ហើយ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+xe^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)+\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=+\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)=+\infty$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x=-\infty$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}+2\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}=0$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-\frac{x}{e^x})}{e^x(2+\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-xe^{-x}}{2+e^{-x}} = \frac{1}{2}$$

(ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)

ង. $\lim_{x\to0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to0}\left[\ln x - \ln(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to0} \ln x - \lim_{x\to0} \ln(x+1) = -\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$ ។

ច. $\lim_{x\to\pm\infty} x\ln(x^2+1)$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}(x)\times\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2+1) == \left[\begin{array}{l}-\infty\ ,\ x\to-\infty \\ +\infty\ ,x\to+\infty\end{array}\right.$$

ព្រោះ $\lim_{x\to\pm\infty}(x) = \pm\infty$ និង $\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2+1) = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\pm\infty} x\ln(x^2+1) = \pm\infty$ ។

ឆ. $\lim_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right)$

តាង $x = t-4$ កាលណា $x\to-4$ នោះ $t\to0$

$$= \lim_{t\to0}(t-4)\ln\left[4-3(t-4)-(t-4)^2\right]$$

$$= \lim_{t\to0}(t-4)\ln(5t-t^2)$$

$$= \lim_{t\to0}(t-4)[\ \ln t + \ln(5-t)] = +\infty$$

(ព្រោះ $\lim_{t\to0}(t-4) = -4$; $\lim_{t\to0}[\ln t + \ln(5-t)] = -\infty$)

ដូចនេះ $\lim_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right) = +\infty$ ។

ជ. $\lim_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+1}{x}) = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^x = \ln e = 1$$

(ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$)

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\} = 1$ ។

លំហាត់ទី៩២

កំណត់តម្លៃ a ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\dfrac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ a

យើងបាន $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\dfrac{1}{8}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^2-(1+x)}{x(1+ax+\sqrt{1+x})}=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2ax+a^2x^2-1-x}{x(1+ax+\sqrt{1+x})}=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(2a+a^2x-1)}{x(1+ax+\sqrt{1+x})}=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2a+a^2x-1}{1+ax+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{2a-1}{2}=\frac{1}{8}$$

គេទាញបាន $2a-1=\dfrac{1}{4}$ ឬ $a=\dfrac{5}{8}$ ។ ដូចនេះ $a=\dfrac{5}{8}$ ។

លំហាត់ទី៩៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការខាងក្រោមមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅក្នុងចន្លោះដែលគេឲ្យ ៖

ក. $\sin x = x-1 \ , x\in(0,\pi)$ ខ. $20\log_{10} x - x = 0 \ , x\in(1\ ,10)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\sin x = x-1 \ , x\in(0,\pi)$

តាង $f(x)=\sin x-(x-1) \ , x\in(0,\pi)$ ជាអនុគមន៍ជាប់។

យើងមាន $f(0)=\sin 0-(0-1)=1 \ , f(\pi)=\sin\pi-(\pi-1)=-2.14$

ដោយ $f(0)f(\pi) = -2.14 < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន $x_0 \in (0,\pi)$ ដែល $f(x_0) = 0$ ។

ដូចនេះសមីការ $\sin x = x - 1$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយក្នុងចន្លោះ $(0,\pi)$ ។

ខ. $20\log_{10} x - x = 0$, $x \in (1\,,10)$

តាង $f(x) = 20\log_{10} x - x$, $x \in (1,10)$ ជាអនុគមន៍ជាប់។

យើងមាន $f(1) = -1$ & $f(10) = 20 - 10 = 10$ ។

ដោយ $f(1)f(10) = -10 < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន $x_0 \in (1,10)$ ដែល $f(x_0) = 0$ ។

ដូចនេះសមីការ $20\log_{10} x - x = 0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយក្នុងចន្លោះ $(1,10)$ ។

លំហាត់ទី៩៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2} - \sqrt{x^2-x+3})$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2-x+3})$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2 - x\sin x}{x - \sin^2 x}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x - \sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2} - \sqrt{x^2-x+3})$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty - \infty$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} - |x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right) = +\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right) = 2 - 1 = 1$ ។

ខ. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$ មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2-x^2+x-3}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2-\frac{1}{x})}{|x|(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})=1$ ។

គ. $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x-\sin x)}{x(1-\frac{\sin^2 x}{x})}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{1-\frac{\sin x}{x}.\sin x}=\frac{0-0}{1-1\times0}=0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}=0$ ។

ឃ. $\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(2x-\sin x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(2x-\sin x)\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{|\sin x|}-\frac{\sin x}{|\sin x|}\right)\sqrt{1+\cos x}$$

-បើ $x\to0^-$ នោះ $|\sin x|=-\sin x$

គេបាន $\lim_{x\to0^-}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2x}{-\sin x}+1\right)\sqrt{1+\cos x}=-\sqrt{2}$

-បើ $x\to0^+$ នោះ $|\sin x|=\sin x$

គេបាន $\lim_{x\to0^+}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x}{\sin x}-1\right)\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៩៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{|x|+2x^2}{x}$ បើ $x\neq 0$ និង $f(0)=1$ ។

ក.តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

ខ.សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

ក.តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

យើងមាន $f(0)=1$

ហើយ $f(x)=\frac{|x|+2x^2}{x}=2x+\frac{|x|}{x}$ បើ $x\neq 0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x+\frac{|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-1)=-1$ ។

និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x+\frac{|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ នោះ f គ្មានលីមីតត្រង់ 0 ទេ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ 0 ។

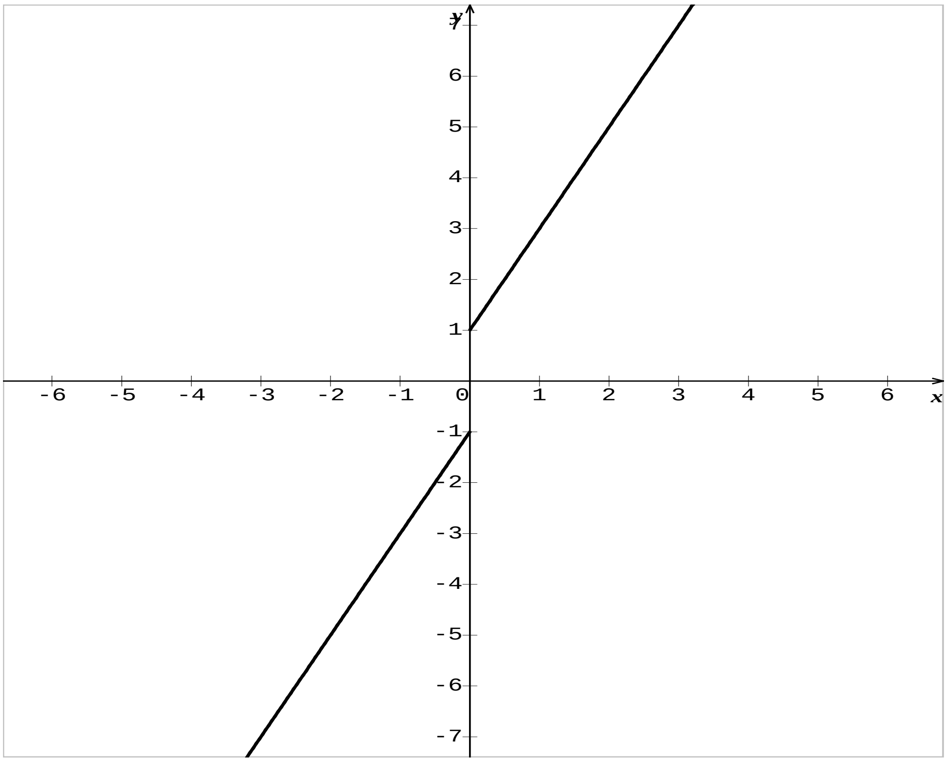
ខ.សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=\frac{|x|+2x^2}{x}=2x+\frac{|x|}{x}$

ដោយ $|x|=x$ បើ $x\geq 0$ និង $|x|=-x$ បើ $x<0$ នោះគេបាន៖

$f(x)=2x+1$ បើ $x\geq 0$ និង $f(x)=2x-1$ បើ $x<0$ ។

ដូចនេះគេអាចសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ដូចខាងក្រោម។



លំហាត់ទី៩៦

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{x-2}}{x^3}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{x-2}}{x^3}=\dfrac{3}{e^2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^{\frac{4(x+2)}{x-1}}=e^4$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{xe^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times\dfrac{2}{e^x}=2$ ។

លំហាត់ទី៩៧

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$

ខ. $y=\lg\left(\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}\right)$

ដំណោះស្រាយ

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$

គេអាចសរសេរ $y=\sqrt{(x^2-1)-2\sqrt{x^2-1}+1}+\sqrt{(x-4)+2\sqrt{x-4}+1}$

$$=\sqrt{(\sqrt{x^2-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}+1)^2}$$
$$=|\sqrt{x^2-1}-1|+|\sqrt{x-4}+1|$$

អនុគមន៍មានន័លុះត្រាតែ $\begin{cases}x^2-1\geq 0\\ x-4\geq 0\end{cases}$ សមមូល $x\geq 4$ ។

ដូចនេះដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D_f=[4,+\infty)$ ។

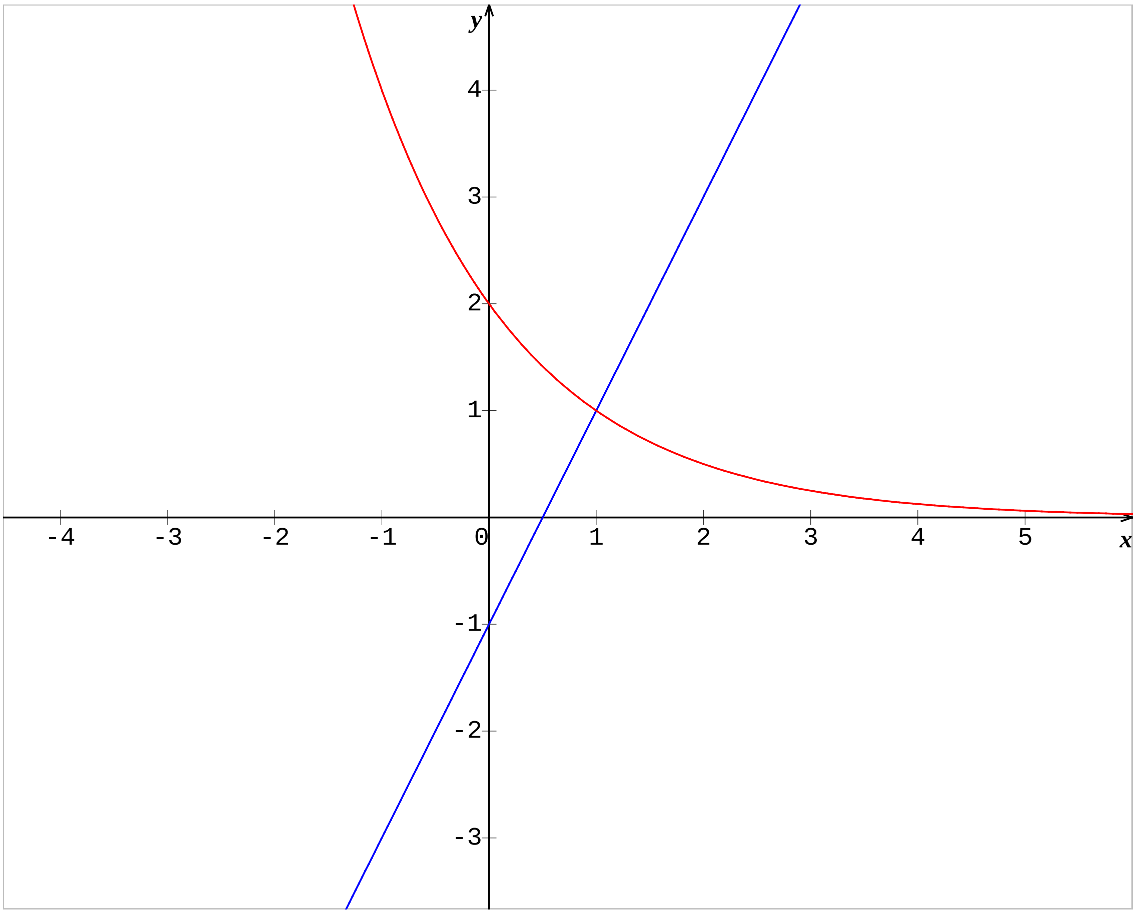
ខ. $y=\lg\left(\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}\right)$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}>0\\ 2^x-1\neq 0\end{cases}$

យើងសិក្សាសញ្ញានៃ $N=2^{1-x}-2x+1$ និង $D=2^x-1$ ។

តាង $(C):f(x)=2^{1-x}$ និង $(L):g(x)=2x-1$ នោះ $N=f(x)-g(x)=2^{1-x}-2x+1$

យើងសង់ក្រាប (C) និង (L) ក្នុងតម្រុយរួមគ្នា ៖



តាមក្រាហ្វិកយើងបាន ៖

.ចំពោះ $x \in (-\infty , 1) : N = 2^{1-x} - 2x + 1 > 0$ ។

.ចំពោះ $x = 1$ នោះ $N = 0$ ។

.ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ នោះ $N = 2^{1-x} - 2x + 1 < 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះកន្សោម $D = 2^x - 1$ ៖

.បើ $D = 2^x - 1 = 0$ សមមូល $x = 0$ ។

.បើ $D = 2^x - 1 < 0$ សមមូល $x \in (-\infty , 0)$ ។

.បើ $D = 2^x - 1 > 0$ សមមូល $x \in (0 , +\infty)$ ។

តារាងសញ្ញា $\dfrac{N}{D}=\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}$

x	$-\infty$			1	$+\infty$
N	$+$		$+$	0	$-$
D	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{N}{D}$	$-$	0	$+$		$-$

តាមតារាងខាងលើគេបាន $\dfrac{N}{D}=\dfrac{2^{1-x}-2x+1}{2^x-1}>0$ សមមូល $0<x<1$ ។

ដូចនេះ $D_f=(0,1)$ ។

លំហាត់ទី៩៨

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$ ដែល $x>0$ ។

ក)បង្ហាញថា $f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ខ)បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x>1$ គេបាន $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)បង្ហាញថា $f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

យើងមាន $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

ចំពោះគ្រប់ $x>0:f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\sqrt{x}-1$ ។

បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=0$ ឬ $x=1$ ។

បើ $f'(x)<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1<0$ ឬ $0<x<1$ ។

បើ $f'(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1>0$ ឬ $x>1$ ។

តារាងអថេរភាពនៃ f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $f(1)=2$ ។

តាមតារាងអថេរភាពខាងលើនេះយើងទាញបានថា $\forall x>0:\ f(x)\geq 2>0$

ដូចនេះ $f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ)បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x>1$ គេបាន $0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

តាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចំពោះគ្រប់ $x>1$ គេបាន $f(x)>0$

នោះ $2\sqrt{x}-\ln x>0$ ឬ $\frac{\ln x}{x}<\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}\quad(1)$

ម្យ៉ាងទៀតគ្រប់ $x>1$ គេមាន $\ln x>\ln 1=0$ នោះ $\frac{\ln x}{x}>0\quad(2)$

តាម (1) និង (2) យើងទាញបាន $0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}$ ពិត។

ដោយ $0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}$ នោះ $0<\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}<\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x\ln(\frac{x}{e})$ ដែល $e=2.71828...$

១.ចូរគណនា $f'(x)$រួចចំពោះគ្រប់ $x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ និង $k\in\mathbb{N}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le f'(x)\le\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ។

២.ប្រើទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ទៅនិងអនុគមន៍ f គ្រប់ $k,n\in\mathbb{N}$

ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\le\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ។

៣.ទាញឲ្យបានថាចំពោះគ្រប់ $k,n\in\mathbb{N}$ គេមាន៖

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{e}\right)\le\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\le\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$$

៤.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\frac{1}{e}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $f'(x)$ ៖

យើងមាន $f(x)=x\ln\left(\frac{x}{e}\right)=x(\ln x-\ln e)=x(\ln x-1)$

យើងបាន $f'(x)=(x)'(\ln x-1)+x(\ln x-1)'=\ln x-1+1=\ln x$

ដូចនេះ $f'(x)=\ln x$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le f'(x)\le\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ៖

យើងមាន $f'(x)=\ln x$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ គេបាន $\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ និង $k\in\mathbb{N}$

គេទាញ $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le \ln x\le \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

ដូចនេះ $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le f'(x)\le \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ពិត។

២.ទាញបញ្ជាក់ថា $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le (k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\le \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le f'(x)\le \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ទៅនិងអនុគមន៍ f គ្រប់ $k,n\in\mathbb{N}$

គេបាន $\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\le\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le\frac{k+1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\le\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

ដូចនេះ $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le (k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\le \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ពិត។

៣.ទាញឲ្យបានថាចំពោះគ្រប់ $k,n\in\mathbb{N}$ គេមាន៖

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{e}\right)\le\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\le\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$$

គេមាន $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le (k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\le \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

គេទាញ $\begin{cases}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le (k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right) & (i)\\ \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)\ge (k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right) & (ii)\end{cases}$

តាម (i) គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\right]$

ឬ $\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+\ln\left(\frac{n}{n}\right)\le (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$

ឬ $\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\le(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$

គេទាញបាន $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\le\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{ne}\right)\ (iii)$

តាម(ii)គេបាន$\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)\ge\sum_{k=1}^{n-1}\left[(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\right]$

ឬ $\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\ln\left(\frac{3}{n}\right)+\dots+\ln\left(\frac{n}{n}\right)\ge n\ln\left(\frac{n}{ne}\right)-\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$

ឬ $\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\ln\left(\frac{3}{n}\right)+\dots+\ln\left(\frac{n}{n}\right)\ge\ln\left(\frac{1}{n}\right)+n\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$

ឬ $\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\ge\ln\left(\frac{1}{n}\right)+n\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\ln\left(\frac{1}{n}\right)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

គេទាញបាន $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\ge\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{e}\right)\quad(iv)$

តាម$(iii)\&(iv)$គេបាន ៖

$\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{e}\right)\le\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\le\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$ ពិត។

៤.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\frac{1}{e}$

គេមាន$\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{e}\right)\le\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\le\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$

ឬ $$\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right)\le\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{ne}\right)+\frac{\ln(ne)}{n}$$

គេបាន

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right)\le\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)\le\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{ne}\right)+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}\right]$$

ឬ $\ln\left(\frac{1}{e}\right)\le\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)\le\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ នោះគេទាញបាន $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\frac{1}{e}$ ពិត។

ជំពូកទី០៦

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ

១.ក)ដោយប្រើនិយមន័យចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោម ៖

$a)\lim\limits_{x\to 1}(4x+1)=5$ $b)\lim\limits_{x\to -2}(3x+7)=1$

$c)\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2x+3\right)=6$ $d)\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-3x+1\right)=3$

ខ.គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$ និង $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=-1$ ។

ចូរគណនាលីមីត

$A=\lim\limits_{x\to 2}\left[2f(x)-3g(x)\right]$ និង $B=\lim\limits_{x\to 2}\left[f^2(x)-4g^2(x)\right]$ ។

គ.គេដឹងថា $\lim\limits_{x\to 1}\left[3f(x)-2g(x)\right]=5$ និង $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)-2f(x)\right]=-4$ ។

ចូរកំណត់ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ ។

២.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$

គ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-3x+1}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x+3}{(x-1)^2}$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-6x+8}$ ច. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

៣.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{x+4}$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$

ច. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x(x+1)}{x-2}-\dfrac{6x^2}{x^2-4}\right]$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-1}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^4-16}$

៤)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{(x^3-x)^3}$

ខ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

គ. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x}{2x^2-3x+1}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ $(\ n\in\mathbb{N}\ )$

ង. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$

ច. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$

៥)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-4x-1}{x^3+x^2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+x^2+x^3-12}{x-2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2x^2+3x^3-6}{x-1}$

៦)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}{x-2}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-\sqrt{2x+1}}{x^2}$

ច. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x+7}}{x-2}$

៧)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(1+x)(1+2x)}-1}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-3}{x-2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+3x+5}}{x-1}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

ង. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}-2}{x-2}$

ច. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x-1}-x}$

៨)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-2}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

គ. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}$

ង. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-x+1}{x-2}$

ច. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}$

៩)គេឲ្យ $f(x)=3x^2+x$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ។

១០)គេឲ្យ $f(x)=x^3-3x$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2}$ ។

១១)រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$ ។

១២)រកចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-mx+8}{x^2-(n+2)x+2n}=\frac{1}{5}$ ។

១៣)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1-\tan^2 x}$

ខ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3-4\sin^2 x}{2\cos x-1}$

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos^2 x-3}{1-2\sin x}$

ឃ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2-\sin x-\sin^2 x}{1-\sin x}$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{1-\cos^3 x}$

ច. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{2\sin x-1}$

១៤)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}}{\sin x-\sqrt{3}\cos x}$

ខ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-3\tan x+2}{\sin x-\cos x}$

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos^3 x-\sin^3 x}$

ឃ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos^2 x-1}{\sin x-\sin 2x}$

ង. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^3 x}{\cos 2x}$

ច. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x}{\cos x-\sin 2x}$

១៥)គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$

ក)ស្រាយថា $f(x)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$ ។ ខ)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-4f(x)}{1-\sin^3 2x}$ ។

១៦)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+3}$

ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)(2x+3)}{x^2+1}$

គ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x^2+1)(4x^3+3)}{x^4(2x+1)}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+(x+5)^5}{x^5+5}$

ង. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{10}+(x+1)^{10}+\ldots+(x+10)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

ច. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x^2+1)^3(3x^3+2)^2}{6\ (2x^3+1)^4}$

១៧)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

ង. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

១៨)គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (U_n) កំណត់ដោយ $U_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

ក/ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $U_n=\frac{A}{n^2}+\frac{B}{(n+1)^2}$ ។

ខ/គណនាលីមីតនៃ $S_n=U_1+U_2+\ldots+U_n$ កាលណា $n\to+\infty$ ។

១៩)គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\ldots(1-\frac{1}{n^2})\right]$ ។

២០)គេឲ្យផលបូក $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots.+\frac{2n-1}{2^n}$ ។

ក/ គណនា $S_n-\frac{1}{2}S_n$ រួចទាញរក S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

២១)គេឲ្យស្វីត $U_n=\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\ldots\times\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}$ ។គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

២២)គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c\in\Re$ ។

គេឧបមាថាមានចំនួនពិត λ មួយដែល $f(\lambda)=\lambda$ ។

ចូរស្រាយថា $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{f\left[f(x)\right]-x}{f(x)-x}=2a\lambda+b+1$ ។

២៣)រកត្រីធាដឺក្រេទីពីរ $f(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=1$ និង $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=-1$ ។

២៤)គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-4}$

កំណត់ a,b និង c ដោយដឹងថា $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$ និង $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$ ។

២៥)កំណត់ចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(m-1)x^2+nx+1}{2x+3}=1$ ។

២៦)គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^3+(m-4)x^2-(3m-5)x+2m-2}{x^3-3x^2+2x}$

ក/កំណត់ m ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

ខ/ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ ។

២៧)គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$?

២៨)គេឲ្យផលបូក $S_n=1^2+4^2+7^2+...+(3n-2)^2$ ដែល $n\in IN$

ក/ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយថា ៖

$S_n=\dfrac{1}{2}n(6n^2-3n-1)$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1^2+4^2+7^2+...+(3n-2)^2}{6n^2}-n\right]$ ។

២៩)គេឲ្យផលបូក $S_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{15^2}+\dfrac{3}{35^2}+....+\dfrac{n}{(4n^2-1)^2}$

ក/ស្រាយថា $\dfrac{k}{(4k^2-1)^2}=\dfrac{1}{8(2k-1)^2}-\dfrac{1}{8(2k+1)^2}$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ ។

ខ/ប្រើសមភាពខាងលើចូរគណនា S_n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

៣០)គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ ។

គណនាលីមីតនៃ f កាលណា $n\to+\infty$ ។

៣១)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt[4]{x^4+4x^3}-3x)$ ។

៣២)គណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}+\ldots+\sqrt{x^2+nx}-nx\right)$$

៣៣)គេឲ្យស្វ៊ីត $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ ។

៣៤)គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$a_{n+1}=\sqrt[3]{\dfrac{2a_n^2}{3}}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ និង $a_1=\dfrac{2}{3}$

ក/តាង $b_n=1+\log_{\frac{3}{2}}a_n$ ។ ចូរស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ/គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ ។

៣៥)គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n=(1+\dfrac{1}{2})\,(1+\dfrac{1}{4})\,(1+\dfrac{1}{16})\,\ldots\,(1+\dfrac{1}{2^{2^n}})$

ក/ គណនា $(1-\dfrac{1}{2})U_n$ រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

៣៦)គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n=\dfrac{1!.1+2!.2+3!.3+\ldots+n!.n}{(n+1)!}$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

៣៧)គេឲ្យស្វ៊ីត $u_0=\sqrt{2}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

ក/ស្រាយថា $u_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ គ្រប់ $n=0\,,1\,,2,3,\ldots$ ។

ខ/គណនាលីមីតនៃ u_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

៣៨)គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់ដោយ ៖

$f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n}$ និង $g(x)=\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}$ ដែល $m,n\in\mathbb{N}$

ក/គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ។ ខ/ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{x\to1}g(x)$ ។

៣៩)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{(1+x)(1+2x)}-1}{x}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^3+1}-3}{x-2}$

គ/ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+3x+5}}{x-1}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

ង/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}-2}{x-2}$ ច/ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x-1}-x}$

៤០) កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+4}{x-2}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$ ច/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+ax+2}{x^2-4}$

៤១)កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4+ax^3+bx+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

គ/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4+6x^2+ax+b}{x^3-3x^2+4}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)^3+ax+b}{x^2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5+ax+b}{x^3-3x+2}$ ច/ $\lim\limits_{x\to2}\frac{ax^2+bx+4}{x^4-8x^2+16}$

ឆ/ $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3+ax+b}{(x-a)^2}$ ជ/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{ax+b-(1+2x)^3}{x^2}$

៤២)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$ ច/ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})$

៤៣)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ង/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ ច/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$ ជ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ឈ/ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ ញ/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan\pi x}{1-x}$

៤៤)កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ $y=f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងពីរ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=1\ \ (i)\quad \text{និង}\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1\ (ii)$$

៤៥)គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2-2\cos ax}{x^2}$ ដែល $a\in\mathbb{R}$ ។

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=100$ ។

៤៦) អនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4-x^2\le f(x)\le 4+x^2$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ។

៤៧)គេមាន $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

៤៨)គេមាន $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ និង $p\in\mathbb{N}$ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ។

៤៩)មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^n}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

កំណត់គ្រប់ n ដែលធ្វើឲ្យ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

៥០)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)\right]$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

៥១)គេមាន $S_n=\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{4\times7}+\dfrac{1}{7\times11}+.....+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

គេបាន $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{A}{3k-2}+\dfrac{B}{3k+1}$ ។

ខ/ប្រើសមភាពខាងលើចូរគណនា S_n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ។

៥២)ក/ គេមាន $k\in\mathbb{N}$ ។

ចូរស្រាយថា $0<\dfrac{2k-1}{2k}<\sqrt{\dfrac{2k-1}{2k+1}}$

ខ/តាង $u_n=\dfrac{1\times3\times5\times....\times(2n-1)}{2\times4\times6\times....\times2n}$ ។

បង្ហាញថា $0<u_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ ។

៥៣)គេមានពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន n ជ្រុង និងកាំ ស្មើនឹង a ។ តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។

គណនា S_n រួចកំណត់រកតម្លៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n$ ។

៥៤)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{2e^x+1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\frac{2x+3}{x+1})$

ង/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+4x^3}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2+2x}-3x)$

៥៥)គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2}-2\sqrt{x^2-x+3})$

ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$

៥៦)កំណត់តម្លៃ a ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{8}$ ។

៥៧)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ ដែល $m,n\in\mathbb{N}$ ។

៥៨)គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1.2+2.3+3.4+....+(n-1)n}{n^3}$ ។

៥៩)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})....(1-\frac{1}{n^2})$

ខ/ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}})$

៦០)ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេមាន

$$S_n=\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+...+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក/គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយប្រើ $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$

ជាទម្រង់ $\frac{a}{2p+1}+\frac{b}{2p+3}$ ។

ខ/ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

៦១)ដោយប្រើសមភាព $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ ចូរគណនាផលបូក

$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

៦២)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2\ln x}{1-2x+\ln x}$

ខ/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+x-1}{e^x+1}$

គ/ $\lim_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]$

ឃ/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2\ln x}{1+3\ln x}$

ង/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x+\ln x}$

ច/ $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x+x-1}{e^x+x}$

៦៣)គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

ខ/ $\lim_{x\to0}\frac{e^x+x-1}{x}$

គ/ $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}$

ឃ/ $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x}$

ង/ $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

ច/ $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

ឆ/ $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}-2}{\sin x}$

ជ/ $\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{3x}-1)}{x^2}$

ឈ/ $\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin 2x}-\cos 2x}{\tan^2 x}$

ញ/ $\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)$

៦៤)គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$

ខ/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$

គ/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

ឃ/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x\sin 3x)}{x^2}$

ង/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

ច/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2\cos x-\cos 2x)}{\sin^2 x}$

ឆ/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln[(1+x)(1+2x)]}{x}$

ជ/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan x)}{x}$

ឈ/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2-e^x)}{x}$

ញ/ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(3-2\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

៦៥)គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

ខ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-2x+2)}{x^3-3x+2}$

គ/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\pi-4x}$

ឃ/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង/ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-4x+5)}{e^{x-2}+e^{2-x}-2}$

ច/ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(4-x)-\ln 2}{x-2}$

ឆ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$

ជ/ $\lim_{x\to e}\frac{\ln^2 x-3\ln x+2}{1-\ln x}$

៦៦)គេឲ្យអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le x$ ចំពោះគ្រប់ x ។

គេតាង $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

៦៧)គណនាលីមីត ៖

$$A=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+\ldots+\sqrt{x^2+2nx+1}-\sqrt{n^2x^2+1})$$

៦៨)គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_0=1$, $u_1=2$ និង $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ ដែល $n=0,1,2,\ldots$

ក/ចូរស្រាយថា $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+\frac{5}{2}$ ។

ខ/ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty}u_n$ ។

៦៩)គេមានស្វ៊ីត $u_n=\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(u_n-\sqrt{n})$ ។

៧០)គេឲ្យ $a_k=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ តាង $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ។រក $\lim_{n\to+\infty}S_n$?

៧១)គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់គ្រប់ $n\in IN$ ដែល $0<u_n<1$

និង $u_{n+1}(1-u_n)\ge\frac{1}{4}$ ។

ចូរស្រាយថា $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$ ។

៧២) ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដែល $u_1=5$ និង $u_{n+1}=u_n^2-2$

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_1.u_2.u_3...u_n}$ ។

៧៣)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ ។

៧៤)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+2\cos x}}}}-2}{x}$ ។

៧៥)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}-2\sqrt[4]{x^4-4x^3})$ ។

៧៦)គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+n^2\sin^n\dfrac{\pi}{6}+\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)\right]$

៧៧)គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$ ។

៧៨)គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n^2+n-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3}\right]$ ។

៧៩)គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+...+\sqrt[n]{a}-n}{\ln(n)}$ ។

៨០)គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n.\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{n}\right)\right]$ ។

៨១.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ ។

គណនាលីមីតនៃ f កាលណា $n\to+\infty$ ។

៨២.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt[4]{x^4+4x^3}-3x)$ ។

៨៣.ចូរគណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}+...+\sqrt{x^2+nx}-nx\right)$$

៨៤.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

ខ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$

គ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

ឃ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{2x+3}{x+1})$

ង) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+4x^3}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2+2x}-3x)$

៨៥.គណនាលីមីត ៖

ក) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2}-2\sqrt{x^2-x+3})$

ខ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$

៨៦.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\ln x}{1-2x+\ln x}$ ខ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+1}$

គ) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]$ ឃ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2\ln x}{1+3\ln x}$

ង) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{x+\ln x}$ ច) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+x}$

ឆ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n-\ln\left(2e^n+1\right)\right]$ ជ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\ln\left(2n+1\right)-\ln\left(n^2+1\right)\right]$

៨៧.គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$ ខ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

គ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}\tan\left(\dfrac{\pi x+4}{2x+3}\right)$ ឃ) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\sin\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

ង) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\cos\left(\dfrac{\pi x+2}{2x+1}\right)$ ច) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\cot(\dfrac{\pi x+1}{2x-3})$

ឆ) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{x+1}\right)$ ជ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2x^2+1}\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+3}\right)$

ឈ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+4}\tan\left(\dfrac{3\pi x+4}{6x-5}\right)$ ញ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$

៨៨.គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2}$ ខ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

គ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

ង) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+7}-\sqrt{x^2-9x+4})$

ច) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{4x^2+9x})$

ឆ) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}})$

ជ) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x})$

ឈ) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+7x+3}+\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{9x^2+4x+5})$

ញ) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x+3-\sqrt{4x^2-6x+1}\right)$

ដ) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+4x^2+1}-x+2)$

ឋ) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+8x+1}-\sqrt[3]{8x^3+12x^2-x+5})$

ឌ) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+4x^3}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2+2x}-3x+2)$

៨៩.ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ដូចតទៅ ៖

ក) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{2x-5}$

ខ) $\lim_{x\to\infty}\frac{12x-5}{3x+4}$

គ) $\lim_{x\to\infty}\frac{8x-1}{2x+3}$

ឃ) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2-7x+3}$

ង) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-7x+1}{2x^2+5x+4}$

ច) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x}{2(x^2-x-6)}$

ឆ) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+2}{x^3-1}$

ជ) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+x+9}{2x^3+x^2-5x+3}$

ឈ) $\lim_{x\to\infty}\frac{(4x-3)(6x^2+x-7)}{(3x+1)(2x^2-3x+9)}$

ញ) $\lim_{x\to\infty}\frac{(8x-1)(9x^2+x-5)}{(6x+5)(2x^2-9x+1)}$

ដ) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3+x-3}+5x-1}{4x+3}$

ឋ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x^2+x-9}}{2x+3}$

ឌ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+3}+6x-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

ឍ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{36x^2+5x-1}-\sqrt{4x^2+9}}{\sqrt{9x^2+x}+\sqrt{25x^2-7x+3}}$

ណ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

៩០.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+.........+\dfrac{n-1}{n^2})$

ខ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+...............+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$

គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

ឃ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+.............+\dfrac{1}{2^n}\right)$

ង) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+.............+n^3}{n^4}$

ច) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+..........+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

ឆ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+................+\dfrac{1}{n(n+2)}\right]$

ជ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2^3-1}+\dfrac{1}{3^3-1}+\dfrac{1}{4^3-1}+............+\dfrac{1}{n^3-n}\right]$

ឈ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+...................+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$

ញ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4+44+444+.............+\underbrace{444........444}_{(n)}}{10^n}$

៩១.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1+\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{4})(1+\dfrac{1}{16}).................(1+\dfrac{1}{2^{2^n}})\right]$

ខ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.....................\cos\frac{x}{2^n}\right)$

គ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+.........+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}\right)$ $,|x|<1$

ឃ) $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{2}{n^2})(1-\frac{3}{n^2}).................(1-\frac{n}{n^2})$

ង) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2^3+1}{2^3-1}.\frac{3^3+1}{3^3-1}.\frac{4^3+1}{4^3-1}............\frac{n^3+1}{n^3-1})$

៩២.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+..............+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

ខ) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+...........+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$

គ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+..................+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

ឃ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..........+\frac{1}{n+kn}\right)$

ង) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{a}{n}+\cos\frac{2a}{n}+\cos\frac{3a}{n}+............+\cos\frac{(na)}{n}\right]$

៩៣.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+............+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

ខ) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1.1!+2.2!+3.3!+..............+n.n!}{(n+1)!}$

គ) $\lim_{n\to+\infty}\frac{C_n^0+C_n^1+C_n^2+.........+C_n^n}{1+2+4+8+..........+2^n}$

ឃ) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{k^4+k^2+1}\right)$ ង) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

៩៤.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{9x^2-8x})$

ខ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{8x^3-4x^2+3x+5}-\sqrt[3]{8x^3+6x^2-2x+1})$

គ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ x+4-\sqrt[3]{x^3-6x^2+4}\ )$

ឃ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt[3]{x^3+6x^2}+\sqrt[3]{x^3+9x^2}-\sqrt{9x^2-4x+3}\ )$

ង) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ \sqrt[4]{x^4-8x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-9x^2+4x+1})$

ច) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+\dots\dots\dots\dots+\sqrt{x^2+nx}-n\sqrt{x^2+8x+1})$

ជ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2+4x+1}+\dots\dots\dots+\sqrt[3]{x^2+nx+1}-\sqrt[3]{n^3x^3+1})$

ឈ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{(x+2)(x+4)(x+6)}-x\right]$ ។

ញ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n)}-x\right]$

៩៥.គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0\ ,\ a,b,c\in\Re$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ លេខមេគុណ a,b,c ដោយដឹងថា $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2+1}=3\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x(4x+1)}{x+1}=4\\ f(0)=5\end{cases}$

៩៦.គេឲ្យពហុធា $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ដែល $a\neq 0\ ,\ a,b,c,d\in\Re$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ លេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^3+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3+x}{x^2+1}=2 \\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3 \end{cases}$

៩៧.គណនាលីមីត ៖

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt[3]{x^3+9x^2}+\sqrt[4]{x^4+16x^3}-3x\right)$$

៩៨.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-4x})$

ខ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-5x+1})$

គ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+1}-x)$

ឃ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-8x+5})$

ង) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$

ច) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

ឆ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+7x+3}-\sqrt{4x^2-5x+9})$

ជ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+7x^2}-\sqrt[3]{x^3-2x^2+1})$

ឈ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+9x^2+2x-5}-x)$

ញ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+1}\right)$

៩៩.គេឲ្យផលបូក $S_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dfrac{n}{n^2+3}+\dots+\dfrac{n}{n^2+n}$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $\dfrac{n}{n+1}\le S_n\le\dfrac{n^2}{n^2+1}$ ។

ខ)គណនាលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១០០.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x)=\dfrac{mx^3-(2n-3)x^2+(p-1)x+3k-2}{x-3}$ ដែល $m,n,p,q\in\Re$ ។

ចូរសិក្សាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ទៅតាមតម្លៃផ្សេងៗនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $m,n,p,q\in\Re$ ។

១០១.គេឲ្យ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ដែល $a,b,c\in\Re$

កំណត់លេខមេគុណ a,b,c ដោយដឹងថា $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2(x+1)}{x^2-1}=1\\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^2(x+1)}{x^2-1}=2\end{cases}$

១០២.គេឲ្យ $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ដែល $a,b,c,d\in\Re$

កំណត់លេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា $\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-6\\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=-3\end{cases}$

១០៣.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)(e^{x+1}+1)}$

ដែល $e=2.7182....$ ។

ក)កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{\alpha}{e^x+1}+\dfrac{\beta}{e^{x+1}+1}$

គ្រប់ចំនួនពិត x ។

ខ)គេតាង $S_n=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)$ ។ ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

១០៤.គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\ \mathbb{N}\to\Re$ ដោយ $f(1)=2018$

និង គ្រប់ $n\ge2$: $f(n)=\dfrac{n^3-1}{n^3+1}.f(n-1)$

ក)ចូរកំណត់រក $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ)គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ ។

១០៥.គេឲ្យផលបូក $S_n = \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ក)គេតាង $f(\mathrm{x}) = ax+b$ ។

ចូរបង្ហាញថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបានសមភាព

$\frac{2k-1}{2^k} = \frac{f(k)}{2^k} - \frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ ។

ខ)ចំពោះតម្លៃ a និង b ទើបរកឃើញខាងលើចូរបង្ហាញថា ៖

$S_n = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(n+1)}{2^{n+1}}$ រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១០៦.គេឲ្យ $f(n) = 2\ln(n+1) - \ln(\mathrm{n}^2+2n)$ ដែល $n = 1\,,2\,,3,\ldots$

ហើយគេតាង $S_n = f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $S_n = \ln(\frac{2n+2}{n+2})$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1\,,2\,,3,\ldots$ ។

ខ)គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{n+2}$ រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១០៧.គេឲ្យស្វីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_n = 2\sin(\frac{\pi}{18n^2+30n+8}).\cos(\frac{6n^2+8n+1}{18n^2+30n+8}\pi)$ ដែល $n = 1\,,2\,,3,\ldots$ ។

ក)ចូរបង្ហាញមានស្វីត (α_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_n = \sin\alpha_{n+1} - \sin\alpha_n$ ។

ខ)គេតាង $S_n = u_1+u_2+u_3+\ldots.+u_n$ ។

ចូរស្រាយថា $S_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{(n+1)\pi}{3n+4}$ រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១០៨.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3x+1}-2x)$

ខ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+6x}-3x)$

គ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-6x+2})$ ឃ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+12x^2}-\sqrt[3]{x^3-6x^2+1})$

ង) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+6x+7}-\sqrt[3]{x^3+6x^2+7})$ ច) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+9x^2+4}-\sqrt{x^2-4x+9})$

១០៩.គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n=\dfrac{1!.1+2!.2+3!.3+...+n!.n}{(n+1)!}$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

១១០.គេឲ្យស្វ៊ីត $u_0=\sqrt{2}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

ក)ស្រាយថា $u_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ គ្រប់ $n=0,1,2,3,...$ ។

ខ)គណនាលីមីតនៃ u_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១១១.គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់ដោយ ៖

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{n}{1-x^n}$ និង $g(x)=\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}$ ដែល $m,n\in\mathbb{N}$ ។

ក)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ។

ខ)ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{x\to1}g(x)$

១១២.គេឲ្យផលបូក $S_n=\dfrac{1!1}{\sqrt{1!}+\sqrt{2!}}+\dfrac{2!2}{\sqrt{2!}+\sqrt{3!}}+\dfrac{3!3}{\sqrt{3!}+\sqrt{4!}}+...+\dfrac{n!n}{\sqrt{n!}+\sqrt{(n+1)!}}$

ក)ចូរស្រាយថាគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ គេមាន $\dfrac{k!k}{\sqrt{k!}+\sqrt{(k+1)!}}=\sqrt{(k+1)!}-\sqrt{k!}$ ។

ខ)ទាញរកផលបូក S_n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{S_n-\sqrt{n!n}}{\sqrt{(n-1)!}}\right)$ ។

១១៣.ក)គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2-2\cos ax}{x^2}$ ដែល $a\in\mathbb{R}$

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=100$ ។

ខ)កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ $y=f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងពីរ

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\,f(x)}{x^3-1}=1\ (i)$ និង $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^3-1}=3\ (ii)$

១១៤.មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^n}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

កំណត់គ្រប់ n ដែលធ្វើឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

១១៥. គេមាន $S_n=\dfrac{1}{1\times 4}+\dfrac{1}{4\times 7}+\dfrac{1}{7\times 11}+\ldots..+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

ក)កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

គេបាន $\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{A}{3k-2}+\dfrac{B}{3k+1}$ ។

ខ)ប្រើសមភាពខាងលើចូរគណនា S_n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ។

១១៦.ក)គេមាន $k\in\mathbb{N}$ ។ ចូរស្រាយថា $0<\dfrac{2k-1}{2k}<\sqrt{\dfrac{2k-1}{2k+1}}$

ខ)តាង $u_n=\dfrac{1\times 3\times 5\times\ldots.\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots.\times 2n}$ ។

បង្ហាញថា $0<u_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ ។

១១៧.គេមានពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន n ជ្រុងនិងកាំស្មើនឹង a ។ តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។គណនា S_n រួចកំណត់រកតម្លៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n$

១១៨.កំណត់តម្លៃ a ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\dfrac{1}{8}$

១១៩.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ ដែល $m,n\in\mathbb{N}$ ។

១២០.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1.2+2.3+3.4+\ldots.+(n-1)n}{n^3}$ ។

១២១.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\ldots.(1-\dfrac{1}{n^2})$

ខ) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\ldots.+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}})$

គ) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{16}\right).....\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

១២២.ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេមាន ៖

$$S_n=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\dots+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក)គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយប្រើ $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$

ជាទម្រង់ $\frac{a}{2p+1}+\frac{b}{2p+3}$ ។

ខ)គណនា $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

១២៣.ដោយប្រើសមភាព $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ ចូរគណនាផលបូក

$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

១២៤.គណនាលីមីត ៖

ក) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

ខ) $\lim_{x\to0}\frac{e^x+x-1}{x}$

គ) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-\cos2x}{x^2}$

ឃ) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x}$

ង) $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

ច) $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

ឆ) $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}-2}{\sin x}$

ជ) $\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{3x}-1)}{x^2}$

ឈ) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin2x}-\cos2x}{\tan^2x}$

ញ) $\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{2}{x}}-1)$

១២៥.គណនាលីមីត ៖

ក) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$

ខ) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$

គ) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

ឃ) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x\sin3x)}{x^2}$

ង) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

ច) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2\cos x-\cos2x)}{\sin^2x}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x)(1+2x)]}{x}$

ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)}{x}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^{x})}{x}$

ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-2\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

១២៦.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

ខ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x^3-3x+2}$

គ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\tan x)}{\pi-4x}$

ឃ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-4x+5)}{e^{x-2}+e^{2-x}-2}$

ច) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(4-x)-\ln 2}{x-2}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$

ជ) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^2 x-3\ln x+2}{1-\ln x}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\tan 2x}-2+\cos 2x}{x^2}$

ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}-2}{x^2}$

១២៧.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x+\sin x}-1}{x}$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{\sin 4x}}{x}$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}+e^{cx}-3}{x}$

ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{x}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+4x-1}{e^{4x}-x-1}$

ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}+e^{4x}-2}{e^{3x}-1}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}+e^{x\sin^2 2x}-2}{x^3}$

ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-\cos 4x}{x^2}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{3x}-3e^{2x}+1}{x^2}$

ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{-x}-5e^{2x}+1}{x}$

១២៨.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1+x\sin 2x}-e^{\cos 2x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\tan 2x}}{x^3}$

គ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin x}-e^{\sin 3x}}{1-\sqrt{1-x^3}}$

ឃ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}\cos 2x}{\tan^2 x}$

ង) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^n}$

ច) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-e^{-x^2}\cos 4x}{x^2+1-\cos 2x}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{1-x^2}-e^{\cos 4x}}{x^2}$

ជ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{(x+1)^2}-e^{(x-1)^2}}{e^{x+1}-e^{1-x}}$

ឈ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2-\cos 2x}-e^{1+\sin^2 3x}}{e^{1+x^2}-e^{1-x^2}}$

ញ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos 2x}-e^{\cos 4x}}{e^x+e^{-x}-2}$

ដ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1+x\sin 2x}}-e^{\cos 2x}}{x^2}$

ឋ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan^2 x+\cos 2x}-e^{1+\sin^2 3x}}{x^2}$

១២៩.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2+2x}-e^{x^2-2x}}{x}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{1+x^2}}-e^{\cos 2x}}{x^2}$

គ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin^2 x}\sqrt{\cos x}}{x^2}$

ឃ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos ax}-e^{\cos bx}}{x^2}$

ង) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-e^{1-\sqrt{\cos 2x}}}{x^2}$

ច) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos 2x}-e^{\cos x\sqrt{\cos 2x}}}{x^2}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3+3x^2}-e^{x^3-3x^2}}{e^{1+x^2}-e^{\cos 2x}}$

ជ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\sqrt{\cos 2x}}-e^{\tan^2 x}}{x^2}$

ឈ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin^2 x}\cos 2x\cos 4x}{x^2}$

ញ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{1+\sin^2 3x}-e^{\cos x\cos 3x}}{x^2}$

ដ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{1+3\sin 2x}-e^{2-\cos 4x}}{x^2}$

ឋ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-(1+x^2)e^{x^2}}{1-e^{-x^2}\cos 2x}$

១៣០.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{x}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x-2}{a^x-b^x}$

គ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{4^x-2^x}$

ឃ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2e^x}{x}$

ង) $\lim_{x\to 0}\frac{4-(1+a^x)(1+b^x)}{x}$

ច) $\lim_{x\to 0}\frac{2^{\cos x}-2^{x^2}}{x^2}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\frac{3^{\tan x}-3^{-\tan x}}{x}$

ជ) $\lim_{x\to 0}\frac{2^{\cos 2x}-2^{\cos 4x}}{x^2}$

ឈ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2^{x+3}}-\sqrt{3^{x+2}}}{x}$

ញ) $\lim_{x\to 0}\frac{4^{\cos 2x}-2^{1+\cos 4x}}{x^2}$

ដ) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$

ឋ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-2^{x^2}\cos 2x}{x^2}$

១៣១.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{x}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin 3x)}{x}$

គ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin 2x)}{x^2}$

ឃ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3-2\cos 2x)}{x^2}$

ង) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 6x)}{x^2}$

ច) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)+\ln(\cos 4x)}{x^2}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\sqrt{1+x^2})}{x^2}$

ជ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2-\ln(1+\cos 2x)}{2^{x^2}-1}$

ឈ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^2)}{\ln(\cos x)-\ln(\cos 3x)}$

ញ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x\cos^3 2x)}{x^2}$

ដ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)\right]}{x}$

ឋ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-e^x)}{x}$

១៣២.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

គ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\tan x}}$

ឃ) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$

ង) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-2x}}$

ច) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\tan x\right)^{\tan 2x}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

ជ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{(\pi-2x)^2}}$

ឈ) $\lim_{x\to\pi}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{(\pi-x)^2}}$

ញ) $\lim_{x\to 0}\left(2e^x-e^{2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

ដ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

ឋ) $\lim_{x\to 0}\left(\cos x\cos 2x\ldots\cos(nx)\right)^{\frac{1}{x^2}}$

១៣៣.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

គ) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

ឃ) $\lim_{x\to 2}\left(x-1\right)^{\frac{x}{x-2}}$

ង) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

ច) $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3+2n^2}$

ឆ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{n}$

ជ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1}$

ឈ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$

ញ) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(x+2)}{x^2+1}\right)^{x}$

ដ) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x(x+1)}\right)^{x}$

ឋ) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{e^x}$

១៣៤.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

កំណត់បីចំនួនពិត a,b,c ដោយដឹងថា ៖

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=1$ និង $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln f(x)}{x-1}=2$ ។

១៣៥.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n}$

ដែល $a_1,a_2,...,a_n>0$ ។ ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$ ។

១៣៦.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+ax}-e^{3x^2-ax}}{x-1}=b$ ។

១៣៧.គេឲ្យអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x-\dfrac{x^2}{2}\le f(x)\le x$ ចំពោះគ្រប់ x

គេតាង $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n^2})$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

១៣៨.គណនាលីមីត ៖

$$A=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+...+\sqrt{x^2+2nx+1}-\sqrt{n^2x^2+1})$$

១៣៩.គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_0=1$, $u_1=2$ និង $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}+u_n}{2}$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក)ចូរស្រាយថា $u_{n+1}=-\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{5}{2}$ ។

ខ)គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

១៤០.គេមានស្វ៊ីត $u_n=\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+....+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\sqrt{n})$ ។

១៤១.គេឲ្យ $a_k=\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ តាង $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ ។រក $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

១៤២.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x-\ln(1+x)$ ដែល $x\ge 0$ ។

ក)ចូរស្រាយថាគ្រប់ $x\ge 0$: $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\le f(x)\le\dfrac{x^2}{2}$ ។

ខ)ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេតាង ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{\sqrt{n^3}}\right)\right]=f\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)+f\left(\frac{2}{\sqrt{n^3}}\right)+f\left(\frac{3}{\sqrt{n^3}}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{\sqrt{n^3}}\right)$$

ចូរស្រាយថា $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{(n+1)^2}{4n^2\sqrt{n}}\le S_n\le\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ ។

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១៤៣.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\ln(1+x)$ ដែល $x\ge 0$ ។

ក)ចូរស្រាយថាគ្រប់ $x\ge 0$: $x-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le x$ ។

ខ)ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេតាង ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k^2}{n^3}\right)\right]=f\left(\frac{1^2}{n^3}\right)+f\left(\frac{2^2}{n^3}\right)+f\left(\frac{3^2}{n^3}\right)+\ldots+f\left(\frac{n^2}{n^3}\right)$$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1}{60n^5}\le S_n\le\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$ ។

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១៤៤.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sin x$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ក.ចូរស្រាយថាគ្រប់ $x\ge 0$: $x-\frac{x^3}{6}\le f(x)\le x$ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេតាង ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right)\right]=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+f\left(\frac{3}{n^2}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)$$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)^2}{24n^4}\le S_n\le\frac{n+1}{2n}$ ។

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១៤៥.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$ ដែល $x>0$ ។

ក)បង្ហាញថា $f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ)បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x>1$ គេបាន $0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

១៤៦.ចូរគណនាលីមីត $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)$ ។

១៤៧.គេឲ្យកន្សោមផលបូក៖

$$S_n=\frac{\sin x}{1+2\cos 2x}+\frac{1}{3}\frac{\sin\frac{x}{3}}{1+2\cos\frac{2x}{3}}+\frac{1}{3^2}\frac{\sin\frac{x}{3^2}}{1+2\cos\frac{2x}{3^2}}+\dots+\frac{1}{3^n}\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{1+2\cos\frac{2x}{3^n}}$$

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព $\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a}-\frac{1}{\sin a}\right)$ ។

ខ.ដោយប្រើសមភាពខាងលើចូរបង្ហាញថា $S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3x}-\frac{1}{3^n\sin\frac{x}{3^n}}\right)$ ។

គ.ចូរគណនាលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១៤៨.គេឲ្យកន្សោមផលបូក៖

$$S_n=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\tan\frac{x}{2^2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{1}{2^2}\frac{\tan\frac{x}{2^3}}{\cos\frac{x}{2^2}}+\dots+\frac{1}{2^n}\frac{\tan\frac{x}{2^{n+1}}}{\cos\frac{x}{2^n}}$$

ក)ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព $\frac{\tan\frac{a}{2}}{\cos a}=\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}$ ។

ខ)ដោយប្រើសមភាពខាងលើចូរបង្ហាញថា $S_n=\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ ។

គ)ចូរគណនាលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១៤៩.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x\ln(\frac{x}{e})$

ដែល $e=2.71828...$ ។

ក)ចូរគណនា $f'(x)$ រួចចំពោះគ្រប់ $x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ និង $k\in\mathbb{N}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq f'(x)\leq\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ។

ខ)ប្រើទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ទៅនិង f គ្រប់ $k,n\in\mathbb{N}$

ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $\ln\left(\frac{k}{n}\right)\leq(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{ne}\right)-k\ln\left(\frac{k}{ne}\right)\leq\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$ ។

គ)ទាញឲ្យបានថាចំពោះគ្រប់ $k,n\in\mathbb{N}$ គេមាន៖

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{e}\right)\leq\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\leq\left(\frac{n+1}{n}\right)\ln\left(\frac{n+1}{ne}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{ne}\right)$$

ឃ)ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\frac{1}{e}$ ។

១៥០.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3} \text{ និង } B=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x^2}-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]$$

១៥១.គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\left[k.\ln(1+\frac{k}{\sqrt{n^3}})\right]$

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq0$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(x_n)$ ។

១៥២.គេឱ្យផលបូក $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cos(\frac{k\pi}{n^2})\right]$

ក. បង្ហាញថា $\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១៥៣.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 3x}$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{6}$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{6}$ ។

ខ)គណនា $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{x}{3^k})$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១៥៤.គេមានអនុគមន៍ $g(x)=2\cos^2 x-\cos x+1$ ដែល $x\in\mathbb{R}$

ក.ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$ ។

ខ.តាង $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} g(\frac{x}{2^k})$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១៥៥.គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ក.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីបាន ៖

$f(x)=\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}$ គ្រប់ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ខ.តាង $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k f(\frac{x}{2^k})$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

១៥៦.ក)ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

ខ)ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើចូរទាញរកលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ ។

១៥៧.ក)ចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$ ។

ខ)ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើចូរទាញរកតម្លៃលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ ។

១៥៨.ក)ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

ខ)ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើចូរទាញបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $u \geq 0$ គេបាន ៖

$$u-\frac{u^2}{3} \leq \sin^2\sqrt{u} \leq u$$ ។

គ)គេយក $S_n = \sin^2\frac{\sqrt{1}}{n}+\sin^2\frac{\sqrt{2}}{n}+\sin^2\frac{\sqrt{3}}{n}+...+\sin^2\frac{\sqrt{n}}{n}$

ចូរស្រាយថា $\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{18n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

១៥៩.ចូរគណនាលីមីត $A_n = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-\sqrt[n]{nx+1}}{x^2}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$

១៦០.ចូរគណនាលីមីត $A = \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-\sqrt[n]{x}}-\frac{n}{1-\sqrt[m]{x}}\right)$ ដែល $m,n \in \mathbb{N}$ ។

១៦១.ដោយមិនប្រើទ្រឹស្តីបទឡូពីតាល់ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \qquad B = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$C = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad D = \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$$

$$E = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}{x^4}$$

១៦២.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$B=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$C=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$D=\lim_{x\to 0}\left(x\cot x\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$E=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{1+\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{x^4}}$$

១៦៣.ចូរគណនាលីមីត $L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-cot^2x\right)$

១៦៤.គេឲ្យផលបូក

$$S_n=\frac{1!1}{\sqrt{1!}+\sqrt{2!}}+\frac{2!2}{\sqrt{2!}+\sqrt{3!}}+\frac{3!3}{\sqrt{3!}+\sqrt{4!}}+\dots+\frac{n!n}{\sqrt{n!}+\sqrt{(n+1)!}}$$

ក.ចូរស្រាយថាគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ គេមាន $\frac{k!k}{\sqrt{k!}+\sqrt{(k+1)!}}=\sqrt{(k+1)!}-\sqrt{k!}$ ។

ខ.ទាញរកផលបូក S_n រួចគណនា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n-\sqrt{n!n}}{\sqrt{(n-1)!}}\right)$ ។

១៦៥.គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ៖

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1!}+\sqrt{2!}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2!}+\sqrt{3!}}+\dots+\frac{n}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n!}+\sqrt{(n+1)!}}$$

ក.ស្រាយថាគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ គេមាន

$$\frac{k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k!}+\sqrt{(k+1)!}}=\frac{1}{\sqrt{k!}}-\frac{1}{\sqrt{(k+1)!}}$$

ខ.ទាញរក u_n រួចគណនា $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$ ។

១៦៦.គេឲ្យ $S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}$ ។

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1}\frac{dx}{x}<S_n<\int_{n}^{2n}\frac{dx}{x}$ ។

ខ.ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

១៦៧.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3-6x-6}{3x^2+9x+7}$

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=3\left(\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+9x+7}\right)^2$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ខ.ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $f(\log_5 6)$ និង $f(\log_6 7)$ ។

គ.គេយក $P_n=n^3\dfrac{f(1)+1}{f(1)+2}\times\dfrac{f(2)+1}{f(2)+2}\times\dfrac{f(3)+1}{f(3)+2}\times\ldots.\times\dfrac{f(n)+1}{f(n)+2}$ ។

ចូរគណនាលីមីតនៃ P_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១១៦៨.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{(2x-1)^3}{2(12x^2+1)}$

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=3\dfrac{(2x-1)^2(2x+1)^2}{(12x^2+1)^2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ខ.ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $f\left(\log_2\sqrt[3]{7}\right)$ និង $f\left(\log_{\sqrt[3]{3}}\sqrt{2}\right)$ ។

គ.គេយក $P_n=\dfrac{1}{n^3}\left(1+\dfrac{1}{f(1)}\right)\left(1+\dfrac{1}{f(2)}\right)\left(1+\dfrac{1}{f(3)}\right)\ldots..\left(1+\dfrac{1}{f(n)}\right)$ ។

ចូរគណនាលីមីតនៃ P_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

១៦៩.ចូរគណនាលីមីត $L_n=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{n+1}\cot^{n+1}x-(n+1)x\cot x+n}{x^2(1-x\cot x)}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$

១៧០.ចូរគណនាលីមីត

$$L_n=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot^2 x+\cot^2 2x+\cot^2 3x+\ldots+\cot^2 nx}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}\right)$$

១៧២.ចូរគណនាលីមីត $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\left(x^2-x\sin x+\sin^2 x\right)-\sqrt{x^4+\sin^4 x}}{x^{10}}$

១៧២.ចូរគណនាលីមីត $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\left(x^2-x\tan x+\tan^2 x\right)-\sqrt{x^4+\tan^4 x}}{x^{10}}$

១៧៣.ចូរគណនាលីមីតត្រង់អនន្តនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

គ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x}{2\left(x^2-2x+2\right)}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

ង. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

ច. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

ឆ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

ជ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)$

ឈ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

ញ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{2e^x+1}$

ដ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x+9}{e^x+3}$

ឋ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x+2}{x-e^x}$

ឌ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2x-1}{x+1-e^x}$

ឍ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-\ln x}{x+\ln x}$

ណ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2-\ln x+2}{(\ln x)^2}$

ត. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-\ln x}{x^2+1}$

ថ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\ln x-\ln\left(2x^2-2x+1\right)\right]$

ទ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(2e^x+1\right)\right]$

ធ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+2e^2+3}-e^x\right)$

ន. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-\sqrt{4e^{2x}-12e^x+13}\right)$

ប. $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\sqrt{\ln^2 x-4\ln x+5}\right)$

ផ. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+4e^{x}+9}-e^{x}\right)$

ព. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+4e^{x}+9}-e^{x}\right)$

ភ. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x-1}$

ម. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\ln x)^2}{x^2+1}$

យ. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x+1)^2}{e^{2x}+1}$

រ. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2\ln x}{1+x-e^x}$

ល. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+xe^x+1}{(x+1)^2}$

វ. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-xe^x}{(x+1)e^x}$

ស. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x\ln x+1}{(x+\ln x)^2}$

ហ. $\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(1-\cos\dfrac{2}{x}\right)\right]$

ឡ. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x+\cos x}{x}$

អ. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

១៧៤.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2e^x+x^2-3}{x^2+1+e^x}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ចូរគណនា $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ។

១៧៥. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$ ដែល $x>0$ និង $x\neq e$

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim_{x\to e}f(x)$ ។

១៧៦.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{e^{2x}-4e^x+9}-e^x$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ចូរគណនា $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ។

១៧៧.គេឲ្យស្វ៊ីត $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}a_n$ ។

១៧៨.គេឲ្យស្វ៊ីត $P_n=(1+\frac{1}{2})\,(1+\frac{1}{4})\,(1+\frac{1}{16})\,...\,(1+\frac{1}{2^{2^n}})$

ក)គណនា $(1-\frac{1}{2})P_n$ រួចទាញរក P_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ)គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$ ។

១៧៩.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}\ \ ,x>0$

ក)ចូរស្រាយថា $x-\frac{x^2}{2}\le\ f(x)\ \le x$

ខ)គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+f(\frac{3}{n^2})+.........+f(\frac{n}{n^2})\right]$ ។

១៨០.ក. ចូរស្រាយថា $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x\ \ ,\forall x\ge 0$

ខ. តាង $P_n=\ln\left[(1+\frac{1}{n^3})(1+\frac{4}{n^3})(1+\frac{9}{n^3}).........(1+\frac{n^2}{n^3})\right]$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$ ។

១៨១.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{2n^2+3x+1}\cdot\tan\left(\frac{2\pi}{n^2}\sqrt{1^3+2^3+3^3+...+n^3}\right)$

១៨២.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{n(n+1)^2}\cdot\cos\frac{(1+2+3+...+n)\pi}{n^2}\right]$

១៨៣.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x+1}\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right)\right]$ ។

១៨៤.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\sin\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)$ ។

១៨៥.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$ ។

១៨៦.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}+e^{-ax^2}-2}{x^3\sin(ax)}$ ដែល $a\ne 0$ ។

១៨៧.គណនាលីមីត៖

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt[3]{x}-x-2}{x^4-2x^2+1}\text{ និង }B=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}+1}{(\sqrt{k}+k)(\sqrt{k+1}+k+1)}\right]$$

១៨៨.គណនាលីមីត៖

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}\text{ និង }B=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt[4]{x^4-8x^3}\right)$$

១៩០.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2\cos\frac{\pi x}{3}}{x-1}\quad\text{ និង }B=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+\ln x)(4e^x-x+1)}{x^2+2xe^x+1}$$

១៩១.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\ ,m,n\in\mathbb{N}$ ។

១៩២.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+mx}-\sqrt[n]{1+nx}}{x^2}\ ;\ m,n\in\mathbb{N}$ ។

១៩៣.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^m)^n-(1+x^n)^m}{x^2}\ ;\ m,n\in\mathbb{N}$ ។

១៩៤.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n)}-x\right]$ ។

១៩៥.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$ និង $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x-\frac{x^3}{6}}{x^5}$ ។

១៩៦.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$ និង $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$ ។

១៩៧.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^m x\cos^n x}{x^2}$ ដែល $m,n\in\mathbb{N}$ ។

១៩៨.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ ។

១៩៩.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$ ។

២០០.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{x^2}{2}-\ln(1+x)}{x^3}$ ។

២០១.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt[n+1]{(n+1)x-n}}{(x-1)^2}$ ខ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}\left[x-\sqrt[n]{\dfrac{nx^{n+1}+1}{n+1}}\right]$

គ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[x-\sqrt[n+1]{\dfrac{(n+1)x^n-1}{n}}\right]}{(x-1)^2}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[n]{x}}{x-1}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x^m\right)^n-\left(1+x^n\right)^m}{x^2}$ (ដែល $m,n\in\mathbb{N}$)។

២០២.គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^3+(m-4)x^2-(3m-5)x+2m-2}{x^3-3x^2+2x}$

ក/កំណត់ m ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

ខ/ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ។

២០៣.គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ។

២០៤. អនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4-x^2\le f(x)\le 4+x^2$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ។

២០៥.គេមាន $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ ។

២០៦.គេមាន $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ និង $p\in\mathbb{N}$

គណនា $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ។

២០៧.កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+4}{x-2}$ ខ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

គ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ង) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$ ច) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+ax+2}{x^2-4}$

២០៨.កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}$ ខ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+ax^3+bx+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

គ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+6x^2+ax+b}{x^3-3x^2+4}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^3+ax+b}{x^2}$

ង) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5+ax+b}{x^3-3x+2}$ ច) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{ax^2+bx+4}{x^4-8x^2+16}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-a)^2}$ ជ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+b-(1+2x)^3}{x^2}$

២០៩.កំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{ax^3+bx+6}{x-3}=5$ ។

២១០.កំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+ax^2+bx+4}{x-2}=8$ ។

២១១.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-x^4+4x^2-4}{x^3-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-2x^3+x^2-4}{x^3-8}$

គ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^4-6x^3-x^2+9}{x^3-3x^2+3x-9}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

ង. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin^3 x}$ ច. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{3-4\sin^2 x}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$

ច. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x+4}-\sqrt{x^2+3x+5}}{x-1}$ ឆ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x+7}}{x-2}$

ដ. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+7}-\sqrt{2x-2}}{(x-3)^2}$ ឈ. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^4-7}-\sqrt{2x^3-x^2-3}}{x-2}$

ញ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$ ដ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

២១២.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^3-1}=\dfrac{4}{3}$ ។

២១៣.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ ។

២១៤.កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\dfrac{3}{2}$ ។

២១៥.ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\tan x}{x}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+\sin 2x}{x}$

គ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin 2x}{x+\sin x}$ ឃ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\sin x}{1-\cos x+\sin x}$

ង. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x^2-\cos 2x}{x^2}$ ច. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin 2x-\cos 2x}{x^2}$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2-\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$ ជ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x-\sin 4x}{x^3}$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$ ញ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3}$

ដ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x\cos 4x}{x^2}$ ឋ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x^2}$

ឌ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos 2x}}{x^2}$ ឍ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x\cos 2x}{x^2}$

ណ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}$ ត. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

ថ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ ទ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}$

ធ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 2x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ ន. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin 2x-\cos 2x}{1-x\sin x-\cos 2x}$

ប. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2-x\sin x}$ ផ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-\sin^3 x}{x^3-x^2\sin x}$

ព. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos 2x}+\cos 2x-3\right)$

ភ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$

ម. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^4 2x}{x\sin 4x}$

យ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

រ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos x}{x^2}$

ល. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^4 x\cos 2x}{x^2}$

វ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x\cos^3 2x}{x^2}$

ស. $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sqrt{3+\cos 2x}}{x^2}$

ហ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos 2x}-\cos x}{3x^2}$

ឡ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{2\cos 2x-1}}{x^2}$

អ. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{\sin 3x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

២១៦.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

ឃ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

ច) $\lim_{x\to+\infty} x^2(1-\cos\frac{1}{x})$

២១៧.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

គ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

ឃ) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ង) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

ច) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$

ជ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ឈ) $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$

ញ) $\lim_{x\to 1}\frac{\tan \pi x}{1-x}$

២១៨.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x}{x^3}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{x}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x\cos 2x}}{x^2}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x+\sin 2x)^2}{x^2}$ ច) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin^3 2x)}{x^6}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x}}{x}$ ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3(\sin^2 3x)}{\sin^6 x}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x.....\sin nx}{x^n}$ ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2-\cos 2x}}{x\tan x}$

២១៩.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin nx}{x}$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ គ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{n-(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+....+\cos nx)}{x^2}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$

ច) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 2x}}}{x^2}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x....\cos nx}{x^2}$ ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$ ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1+a\sin x)^n}{x}$

២២០.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+a\sin x)^n-(1+b\sin x)^p}{x}$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\cos nx-\sqrt[n]{nx+1}}{x^2}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ ច) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1+a\sin x)^n(1+b\sin x)^p}{x}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2}$ ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x-6}{x^2}$

ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+....+n\cos nx-\dfrac{n(n+1)}{2}}{x^2}$

ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 4x}}{1-\cos 2x}$

ដ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{7+\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2}$

ឋ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos x}}{x^2}$

ឌ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos^3 x}-\sqrt{1+\cos^4 x}}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos^2 x}-\sqrt{1+\cos^2 x}}$

ឍ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^m x}{1-\cos^n x}$

ណ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x\cos 2x\cos 3x....\cos nx}}{x^2}$

២២១. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x.\sin 4x.\sin 8x}{x^3}$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(\sin 2x^3)}{x^6}$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{x}$

ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x}{x^3}$

ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3 2x.\sin^2 3x}{\sin x^5}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x\sin^3 2x}{x^5}$

ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan 2x)+\tan(\sin 4x)}{x}$

២២២.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 x}{x^2}$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+\cos 2x-3}{x^2}$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$

ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{\sin^2 4x}$

ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3\cos 2x+2\cos 3x}{x^2}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x...\cos nx}{x^2}$

២២៣. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

គ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^n x}{x\sin x}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\cos x}-\sqrt{3}}{x^2}$ ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3\cos x}-2}{1-\cos^3 2x}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3-\cos 2x}}{x^2}$ ជ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^2}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$ ញ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx-n}{x^2}$

២២៤. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{1-x^2}$ ខ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^3}$

គ) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos 2x}{(\pi-x)^2}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right).\tan\dfrac{\pi x}{2}$

ង) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4})^2}$ ច) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

ឆ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ ជ) $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

ឈ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8+\tan \pi x}{2-x}$ ញ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

២២៥.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{(1-x)^2}$ ខ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\frac{\pi}{x}}$

គ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3+\tan \pi x}{1-x}$ ឃ) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3\sin x}{x^4}$ ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{2\sin x-\sin 2x}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}$ ជ) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\tan x}$

ឈ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$ ញ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x\sin x}$

ដ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1-\cos\sqrt{x}}$ ឋ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x\tan x}$

ឌ) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1-\cos(1-\cos\sqrt{x})}$ ឍ) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}-3\cos x+1\right)\right]$

២២៦.គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ ខ) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x+\tan x}{x-\sin x-\tan x}$

គ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+\cos x}-\sqrt{(1+x)\cos x}}{\sin 3x-3\sin x}$ ឃ) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

ង) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x+\cos\sqrt{x}}}{x}$ ច) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1+\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}$

ឆ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}-2}{x^2}$ ជ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 2x\sqrt{\cos x}}$

ឈ) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\sqrt{1+x^2-2x\cos 2x}}{x^3}$ ញ) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{2n}{1-\cos^n 2x}\right]$

២២៧.គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$ ខ) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\sin(x-a)}$

គ) $\lim_{x\to 1}\frac{\tan\pi x}{1-x}$ ឃ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^3 2x}{\tan x-\cos tx}$

ង) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$ ច) $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{1-x}$

ឆ) $\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\frac{\pi}{x}$ ជ) $\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin x-\arccos x}{1-x\sqrt{2}}$

ឈ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$ ញ) $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$

២២៨.គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក) $\lim_{x\to1}(1-x^3)\tan\frac{\pi}{1+x}$

ខ) $\lim_{x\to2}\frac{\cot\frac{\pi}{x}}{4-x^2}$

គ) $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}}{\pi-x}$

ឃ) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

ង) $\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}$

ប) $\lim_{x\to1}(1-x)tna\frac{\pi x}{3x-1}$

ឆ) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8+\sin\pi x}{2-x}$

ជ) $\lim_{x\to2}\frac{1-\sin\frac{\pi}{x}}{x^2-4x+4}$

ឈ) $\lim_{x\to1}\frac{(1-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x+1}}$

ញ) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{x+1}$

២២៩.គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$A=\lim_{x\to\infty}\left[x\sin\left(\frac{\pi x}{x+3}\right)\right]$ និង $B=\lim_{x\to\infty}\left[(2x+3)\cos\left(\frac{\pi x+1}{2x-1}\right)\right]$

២៣០.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x+1}{x^2+x+1}\tan\left(\frac{\pi x+4}{2x-1}\right)\right]$$

$$B=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x+1}{2x-1}\cot\left(\frac{\pi x+3}{2x+1}\right)\right]$$

www.mathtoday.wordpress.com