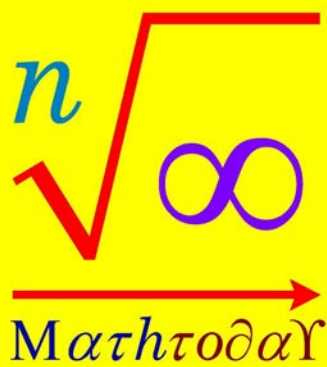


គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ



សៀវភៅគណិតវិទ្យាគម្រិតគណិតវិទ្យាល័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

- * សង្ខេបមេរៀននិងគន្លឹះដោះស្រាយសំខាន់ៗ
- * លំហាត់ជ្រើសរើសអមដោយដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ
- * លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់អិច្វីតូការផ្ទះ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត

អ្នករៀនរៀន

លីម ជំនួន

2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

ជំពូកទី០១

សង្ខេបមេរៀននិងរូបមន្តសំខាន់ៗក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១-និយមន័យ

☆សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ជាសមីការដែលមានអនុគមន៍ $y = f(x)$

និងដេរីវេ $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ។

☆គេហៅអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយ

កាលណាអនុគមន៍ y និងដេរីវេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

☆លំដាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាលំដាប់ដេរីវេខ្ពស់បំផុតនៅក្នុង

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនោះ ។

២-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

២.១.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលងាយ

$$y' = E(x) \Rightarrow y = \int E(x).dx$$

២.២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី១

☆សមីការរាង $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$ ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

លំដាប់ទី១ មានមេគុណថេរ ។

☆សមីការរាង $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$ មានចម្លើយ $y = f(x) = k e^{-ax}$

ដែល k ជាចំនួនពិតណាមួយក៏បាន ។

២.៣.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូស្តែនលំដាប់ទី១

☆សមីការរាង $y' + ay = f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ ហៅថាសមីការ

លីនេអ៊ែរអូម៉ូស្តែនលំដាប់ទី១ មានមេគុណថេរ ។

☆របៀបដោះស្រាយ

សមីការរាង (E) : $y' + ay = f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

☞ រកចម្លើយអូម៉ូស្តែន $y' + ay = 0$ គឺ $y_h = k e^{-ax}$

ដែល k ជាចំនួនពិតណាមួយក៏បាន ។

☞ រកចម្លើយពិសេស y_p របស់សមីការ (E)

☞ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y = y_h + y_p$ ។

២.៤.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអថេរផ្តាច់លំដាប់ទី១

☆សមីការរាង $f(y) y' = g(x)$ ហៅថាសមីការ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលអថេរផ្តាច់លំដាប់ទី១ ។

☆របៀបដោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការរាង $f(y) y' = g(x)$

គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ ៖

☞ ជំនួស $y' = \frac{dy}{dx}$ ក្នុងសមីការគេបាន ៖

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x) \quad \text{ឬ} \quad f(y) \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

☞ ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

$$\int f(y).dy = \int f(x).dx$$

៣-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២

៣.១.និយមន័យ

☆សមីការរាង (E): $ay''+by'+cy=0$, $a \neq 0, a,b,c \in \mathbb{R}$

ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២មានមេគុណថេរ ។

☆សមីការដឺក្រេទីពីរ $ar^2+br+c=0$ ហៅថាសមីការសម្គាល់នៃ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $ay''+by'+cy=0$, $a \neq 0, a,b,c \in \mathbb{R}$

៣.២.ដំណោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២

សមីការរាង (E): $ay''+by'+cy=0$, $a \neq 0, a,b,c \in \mathbb{R}$

មានសមីការសម្គាល់ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ។

☆ករណីទី១

$\Delta > 0$ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា λ_1 និង λ_2

ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E) កំណត់ដោយ ៖

$$y = f(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \quad \text{ដែល } A, B \in \mathbb{R} \quad \text{។}$$

☆ករណីទី២

$\Delta = 0$ សមីការសម្គាល់មានឫសឌុបជាចំនួនពិត $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$

ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E) កំណត់ដោយ ៖

$$y = f(x) = (Ax + B)e^{\lambda_0 x} \quad \text{ដែល } A, B \in \mathbb{R} \quad \text{។}$$

☆ករណីទី៣

$\Delta < 0$ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ ។ ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

(E) គឺ $y = f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$ ។

៣.៣.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២

☆សមីការរាង $ay'' + by' + cy = E(x)$, $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, E(x) \neq 0$

ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២ មានមេគុណថេរ ។

☆របៀបដោះស្រាយ

សមីការ (E) : $ay'' + by' + cy = E(x)$, $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, E(x) \neq 0$

☞ រកចម្លើយអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = 0$ តាងដោយ y_h

☞ រកចម្លើយពិសេស y_p របស់សមីការ (E)

☞ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y = y_h + y_p$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសផ្នែកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

លំហាត់ទី០១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y' - y = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^2}$ ។

១. ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): 2y' - y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី០២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): -y' + 2y = \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2 + 1)^2}$ ។

១. ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): -y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី០៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = (3x^2 - 10x + 5)e^x$ ។

១. ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី០៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 3y = (3\sin x + 5\cos x)e^x$ ។

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី០៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y' + y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$ ។

១. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): 3y' + y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី០៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 4y = 2e^{-3x} + 4x - 3$ ។

១. ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = ae^{-3x} + bx + c \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី០៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y' - 2y = -4x + (x + 2)e^x$ ។

១. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = ax + b + (cx + d)e^x \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២.ដោះស្រាយសមីការ $(F): 3y' - 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី០៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - 3y = (2x - 4)e^{3x}$ ។

១.ចូរកំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = (ax^2 + bx)e^{3x} \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២.ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' - 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

៣.រកអនុគមន៍ $y = h(x)$ ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ h ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

លំហាត់ទី០៩

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - 4y = \frac{(2x - 4)e^{4x}}{x^2 - 4x + 5}$ ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{4x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ $(F): y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = \frac{(2x - 1)e^{-2x}}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{-2x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ $(F): y' = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - 3y = \frac{e^{3x} \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{3x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ $(F): y' = \frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y' - y = 3x - 7$ ។

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 2y' - y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 5y = 9 \sin x + 7 \cos x$ ។

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y' + 5y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y' - y = 2(9 - 4x)e^{-x}$ ។

- ១.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។
- ២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $3y' - y = 0$ ។
- ៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$(E): xy' + (2x + 1)y = (3x + 1)e^x \quad \text{និង} \quad (F): y' + 2y = 0$$

- ១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = xf(x) - xe^x$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

- ២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + y = \frac{2x - 2}{e^x}$

- ១.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{e^x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

- ២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F): $y' + y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $3y' - 2y = 2(2\cos x - \sin x)e^x$

១.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (a\cos x + b\sin x)e^x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F): $3y' - 2y = 0$

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $2y' + 3y = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15$

១.ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ae^{-x} + bx^2 + cx + d$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F): $2y' + 3y = 0$

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y' - 2y = 2e^x \cos x$

១.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \sqrt{2}e^x \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F): $y' - 2y = 0$
៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

សំណួរទី២០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y' - y = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2}$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F): $y' - y = 0$

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

សំណួរទី២១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' + 2y' - 3y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (Δ): $y = -x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 3)$ ។

សំណួរទី២២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 5y' + 4y = 0$ ។

១.ចូរដោះស្រាយសមីការ(E) ។

២.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា ខ្សែកោង(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(Δ): $y = 5x - 1$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -1)$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 6y' + 9y = 0$ ។

១.ចូរដោះស្រាយសមីការ(E) ។

២.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា ខ្សែកោង(C) តាង f កាត់តាមពីរចំណុច $A(0, -1)$ និង $B(1, 0)$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $4y'' - 4y' + y = 0$ ។

១.ចូរដោះស្រាយសមីការ(E) ។

២.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា ខ្សែកោង(C) តាង f កាត់តាមពីរចំណុច $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ និង $B(2, e)$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 4y' + 5y = 0$ ។

១.ចូរដោះស្រាយសមីការ(E) ។

២.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា

$$f(0)=1 \text{ និង } f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+5y=0$ ។

១.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

$$f(0)=1 \text{ និង } f\left(\frac{\pi}{8}\right)=0 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-7y'+10y=0$ ។

១.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

$$f(0)=-6 \text{ និង } f(\ln 2)=4 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+y=0$ ។

១.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

ក្រាប (C) តាង f មានចំណុចរបត់ $I(0,2)$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាប (C) តាង f មានចំណុចរបត់ $I(0,3)$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' + y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបស្មើ e ត្រង់ $x = -1$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 3y' + 2y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ -1 ត្រង់ $x = 0$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y' + 3y = 3x^2 + 14x + 1$ ។

១. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយ មួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $y'' + 4y' + 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់
សមីការ (E) ។

៣.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា
ក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = 3x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 4y' + 4y = (x - 3)e^x$ ។

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = (ax + b)e^x$ ជាចម្លើយមួយ
របស់សមីការ(E) ។

២.ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $y'' - 4y' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់
សមីការ (E) ។

៣.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា
ក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = -x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' + 4y = 3(\cos x + 2\sin x)$ ។

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = a \cos x + b \sin x$ ជាចម្លើយ
មួយរបស់សមីការ(E) ។

២.ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $y'' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់

សមីការ (E) ។

៣.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា

ក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = 4x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0,3)$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 2y' + y = (1 - x)\cos x - \sin x$ ។

១.ចូរស្រាយថា $g(x) = \frac{1}{2}x \sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២.ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $y'' - 2y' + y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់

សមីការ (E) ។

៣.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា

ក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = -x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0,-2)$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $-y'' - y' + 2y = \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3}$ ។

១.ចូរស្រាយថា $g(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២.ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $-y'' - y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់

សមីការ (E) ។

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

$$\text{ក្រាប}(C) \text{ តាង } f \text{ ប៉ះនឹងបន្ទាត់}(d): y = \frac{1}{8}x + \frac{13}{4} \text{ ត្រង់ចំណុច } M\left(0, \frac{13}{4}\right) \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y'' - 3y' + y = -x + 5 + 6e^{-x}$ ។

១. ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + ce^{-x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 2y'' - 3y' + y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 5y' + 6y = 4e^x - 2e^{4x}$ ។

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ae^x + be^{4x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' - 5y' + 6y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + 2y = 6x + 2$ ។

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' - 2y' + 2y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 9y = (13x - 9)e^{2x}$ ។

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (ax + b)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ស្រាយថា $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' + 9y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y'' - 2y' - y = 8\sin x - 6\cos x$ ។

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = a\cos x + b\sin x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ស្រាយថា $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 3y'' - 2y' - y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

សំហាត់ទី៤២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 30x + 4)e^{2x}$ ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = e^{2x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' = 12x^2 - 30x + 4$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

៣.កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E) បើគេដឹងថា

ខ្សែកោង(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(T): $y = 2x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0,3)$ ។

សំហាត់ទី៤៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \cos^2 x$ ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = e^{3x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' = \cos^2 x$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

៣.កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E) បើគេដឹងថា

ខ្សែកោង(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(T): $y = 3x + 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0,2)$ ។

សំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - y' + \frac{1}{4}y = (2x^2 + 1)\sqrt{e^{2x^2+x}}$ ។

១.ឧបមាថា $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ។

ចូរស្រាយថាបើ $y = e^{\frac{x}{2}}\varphi(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះ $\varphi(x)$

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F): $y'' = (2x^2 + 1)e^{x^2}$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)។

លំហាត់ទី៤៥

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$១. y' + 2y = (2x^2 + 1)e^{(x-1)^2}$$

$$២. y'' - 4y' + 4y = (\sin^6 x + \cos^6 x)e^{2x}$$

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E): $\frac{2xy}{1+x^2} + y' \ln(1+x^2) = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x$ ។

១.ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ បើ $y = \frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)

នោះចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(F): \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x \quad ។$$

២.អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ ។ គណនា $g'(x)$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F)រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

លំហាត់ទី៤៧

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 2y' + 2y = 2e^x(\sin x + 2\cos x)$

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): (1+x^2)y'' - 2(1-x)^2 y' + (1-x)(3-x)y = \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$(F): y'' - 2y' + y = \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2} \quad ។$$

១. ចូរស្រាយថាបើ $y = \frac{f(x)}{1+x^2}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ

អនុគមន៍ f ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

២. គេតាង $f(x) = e^x g(x)$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។ ចូរស្រាយអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅ

នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(G): y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ ។

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ g និង f រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

លំហាត់ទី៤៩

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

១. $y' - y = xe^x \sin^2 x$

២. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

លំហាត់ទី៥០

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១. $y' - 2y = xe^{2x} \cot^2 x$

២. $y'' - 2y' + y = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់ជ្រើសរើស

លំហាត់ទី០១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y' - y = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^2}$ ។

១. ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): 2y' - y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ៖

$$(E): 2y' - y = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^2}$$

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$2f'(x) - f(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^2} \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \text{ នោះ } f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

យក $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ និង $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ ជំនួសក្នុង(1) គេបាន ៖

$$\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$\frac{2e^x - e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$\frac{e^x[2-(1+e^x)]}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F): $2y' - y = 0$

សមីការ $2y' - y = 0$ សមមូល $y' - \frac{1}{2}y = 0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2)

មានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = \frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(F) គឺ $g(x) = k e^{\frac{1}{2}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបាននូវចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺ

ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) + g(x)$ ។

ដូចនេះ $y = \frac{e^x}{1+e^x} + k e^{\frac{1}{2}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

លំហាត់ទី០២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): -y' + 2y = \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$ ។

១. ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): -y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ៖

$$(E): -y' + 2y = \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$$

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$-f'(x) + 2f(x) = \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} \text{ នោះ } f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$$

យក $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ និង $f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$-\frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} + \frac{2e^x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(x-1)^2 e^x + 2e^x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} &= \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \\ \frac{e^x [-(x-1)^2 + 2(x^2+1)]}{(x^2+1)^2} &= \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \\ \frac{e^x [-x^2 + 2x - 1 + 2x^2 + 2]}{(x^2+1)^2} &= \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \\ \frac{e^x [x^2 + 2x + 1]}{(x^2+1)^2} &= \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \\ \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} &= \frac{(x+1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \text{ ពិត}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F): $-y' + 2y = 0$

សមីការ $-y' + 2y = 0$ សមមូល $y' - 2y = 0$

មានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = 2$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(F) គឺ $g(x) = k e^{2x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបាននូវចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺ

ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) + g(x)$ ។

ដូចនេះ $y = \frac{e^x}{x^2+1} + k e^{2x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = (3x^2 - 10x + 5)e^x$ ។

១. ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c

$$(E): y' + 2y = (3x^2 - 10x + 5)e^x$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E)

$$\text{ពោលគឺ } f'(x) + 2f(x) = (3x^2 - 10x + 5)e^x \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$f'(x) = (ax^2 + 2ax + bx + b + c)e^x$$

$$\text{យក } f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ និង } f'(x) = (ax^2 + 2ax + bx + b + c)e^x$$

ជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន ៖

$$(ax^2 + 2ax + bx + b + c)e^x + 2(ax^2 + bx + c)e^x = (3x^2 - 10x + 5)e^x$$

$$(ax^2 + 2ax + bx + b + c + 2ax^2 + 2bx + 2c)e^x = (3x^2 - 10x + 5)e^x$$

$$[3ax^2 + (2a + 3b)x + (b + 3c)]e^x = (3x^2 - 10x + 5)e^x$$

$$\text{គេទាញបាន} \begin{cases} 3a = 3 \\ 2a + 3b = -10 \\ b + 3c = 5 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $a = 1, b = -4, c = 3$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 2y = 0$ ៖

សមីការមានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = -2$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ៖

$g(x) = ke^{-2x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) + g(x)$ ។

ចំពោះ: $a = 1, b = -4, c = 3$ នោះ: $f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$ និង $g(x) = ke^{-2x}$

ដូចនេះ: $y = (x^2 - 4x + 3)e^x + ke^{-2x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

លំហាត់ទី០៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 3y = (3\sin x + 5\cos x)e^x$ ។

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a & b ៖

$$(E): y' + 3y = (3\sin x + 5\cos x)e^x$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$$\text{សមីការ}(E) \text{ ពោលគឺ } f'(x) + 3f(x) = (3\sin x + 5\cos x)e^x \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = (a\cos x - b\sin x)e^x + (a\sin x + b\cos x)e^x$$

$$f'(x) = [(a - b)\sin x + (a + b)\cos x]e^x$$

$$\text{យក } f(x) = (a\sin x + b\cos x)e^x \text{ និង } f'(x) = [(a - b)\sin x + (a + b)\cos x]e^x$$

ជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន ៖

$$[(a-b)\sin x + (a+b)\cos x]e^x + 3(a\sin x + b\cos x)e^x = (3\sin x + 5\cos x)e^x$$

$$[(4a-b)\sin x + (a+4b)\cos x]e^x = (3\sin x + 5\cos x)e^x$$

$$(4a-b)\sin x + (a+4b)\cos x = 3\sin x + 5\cos x$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4a-b=3 \\ a+4b=5 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a=1, b=1$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F): $y'+3y=0$ ៖

សមីការមានទម្រង់ទូទៅ $y'-ay=0$ ដែល $a=-3$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) គឺជាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ៖

$g(x)=ke^{-3x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជា

អនុគមន៍កំណត់ដោយ $y=f(x)+g(x)$ ។

ចំពោះ $a=1, b=1$ នោះ $f(x)=(\sin x + \cos x)e^x$ និង $g(x)=ke^{-3x}$

ដូចនេះ $y=(\sin x + \cos x)e^x + ke^{-3x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

លំហាត់ទី០៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y' + y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$ ។

១. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): 3y' + y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ចំនួនពិត a, b, c, d ៖

$$(E): 3y' + y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$$\text{សមីការ}(E) \text{ ពោលគឺ } 3f'(x) + f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28 \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\text{យក } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ និង } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

ជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន ៖

$$3(3ax^2 + 2bx + c) + (ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$$

$$9ax^2 + 6bx + 3c + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$$

$$ax^3 + (9a + b)x^2 + (6b + c)x + (3c + d) = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$$

ដោយធ្វើមេគុណតាមដឺក្រេត្រូវគ្នាគេបាន៖

$$\begin{cases} a = 1 \\ 9a + b = 3 \\ 6b + c = -24 \\ 3c + d = 28 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 12 \\ d = -8 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a = 1, b = -6, c = 12, d = -8$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F): $3y' + y = 0$ ៖

សមីការ $3y' + y = 0$ សមមូល $y' + \frac{1}{3}y = 0$

សមីការមានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = -\frac{1}{3}$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) គឺជាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ៖

$g(x) = ke^{-\frac{1}{3}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជា

អនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) + g(x)$ ។

ចំពោះ $a = 1, b = -6, c = 12, d = -8$ នោះគេបាន៖

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3 \text{ និង } g(x) = k e^{-\frac{1}{3}x}$$

ដូចនេះ $y = (x-2)^3 + k e^{-\frac{1}{3}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

www.mathtoday.wordpress.com

សំណួរទី០៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 4y = 2e^{-3x} + 4x - 3$ ។

១. ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = ae^{-3x} + bx + c \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ចំនួនពិត a, b, c ៖

$$(E): y' + 4y = 2e^{-3x} + 4x - 3$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = ae^{-3x} + bx + c$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$$\text{សមីការ}(E) \text{ ពោលគឺ } f'(x) + 4f(x) = 2e^{-3x} + 4x - 3 \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = ae^{-3x} + bx + c \text{ គេបាន } f'(x) = -3ae^{-3x} + b$$

$$\text{យក } f(x) = ae^{-3x} + bx + c \text{ និង } f'(x) = -3ae^{-3x} + b$$

ជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន ៖

$$-3ae^{-3x} + b + 4(ae^{-3x} + bx + c) = 2e^{-3x} + 4x - 3$$

$$ae^{-3x} + 4bx + (b + 4c) = 2e^{-3x} + 4x - 3$$

ដោយធ្វើមេគុណត្រូវគ្នាគេបាន $\begin{cases} a = 2 \\ 4b = 4 \\ b + 4c = -3 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' + 4y = 0$ ៖

សមីការ $y' + 4y = 0$ មានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = -4$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ៖

$$g(x) = ke^{-4x} \text{ ដែល } k \text{ ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។}$$

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) + g(x)$ ។

ចំពោះ $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ នោះគេបាន៖

$$f(x) = 2e^{-3x} + x - 1 \text{ និង } g(x) = ke^{-4x}$$

ដូចនេះ $y = 2e^{-3x} + x - 1 + ke^{-4x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

លំហាត់ទី០៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y' - 2y = -4x + (x + 2)e^x$ ។

១. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = ax + b + (cx + d)e^x \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): 3y' - 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ចំនួនពិត a, b, c, d ៖

$$(E): 3y' - 2y = -4x + (x + 2)e^x$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = ax + b + (cx + d)e^x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$$\text{សមីការ}(E) \text{ ពោលគឺ } 3f'(x) - 2f(x) = -4x + (x + 2)e^x \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = ax + b + (cx + d)e^x$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = a + ce^x + (cx + d)e^x = a + (cx + c + d)e^x$$

$$\text{យក } f(x) = ax + b + (cx + d)e^x \text{ និង } f'(x) = a + (cx + c + d)e^x$$

ជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន ៖

$$3a + (3cx + 3c + 3d)e^x - 2ax - 2b - (2cx + 2d)e^x = -4x + (x + 2)e^x$$

$$(-2ax + 3a - 2b) + (cx + 3c + d)e^x = -4x + (x + 2)e^x$$

ដោយធ្វើមេគុណត្រូវគ្នាគេបាន
$$\begin{cases} -2a = -4 \\ 3a - 2b = 0 \\ c = 1 \\ 3c + d = 2 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $a = 2, b = 3, c = 1, d = -1$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ $(F): 3y' - 2y = 0$ ៖

សមីការ $3y' - 2y = 0$ សមមូល $y' - \frac{2}{3}y = 0$

មានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = \frac{2}{3}$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ៖

$$g(x) = k e^{\frac{2}{3}x} \quad \text{ដែល } k \text{ ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។}$$

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) + g(x)$ ។

ចំពោះ: $a = 2, b = 3, c = 1, d = -1$ នោះគេបាន៖

$$f(x) = 2x + 3 + (x - 1)e^x \quad \text{និង} \quad g(x) = k e^{\frac{2}{3}x}$$

ដូចនេះ $y = 2x + 3 + (x - 1)e^x + ke^{\frac{2}{3}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

www.mathtoday.wordpress.com

សំណួរទី០៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - 3y = (2x - 4)e^{3x}$ ។

១. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ ៖

$$f(x) = (ax^2 + bx)e^{3x} \text{ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' - 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

៣. រកអនុគមន៍ $y = h(x)$ ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ h ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ចំនួនពិត a, b, c ៖

$$(E): y' - 3y = (2x - 4)e^{3x}$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = (ax^2 + bx)e^{3x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

$$f'(x) - 3f(x) = (2x - 4)e^{3x} \quad (1)$$

គេមាន $f(x) = (ax^2 + bx)e^{3x}$

គេបាន $f'(x) = (2ax + b)e^{3x} + 3(ax^2 + bx)e^{3x}$

$$f'(x) = (3ax^2 + 2ax + 3bx + b)e^{3x}$$

យក $f(x) = (ax^2 + bx)e^{3x}$ និង $f'(x) = (3ax^2 + 2ax + 3bx + b)e^{3x}$

ជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន ៖

$$(3ax^2 + 2ax + 3bx + b)e^{3x} - 3(ax^2 + bx)e^{3x} = (2x - 4)e^{3x}$$

$$(2ax + b)e^{3x} = (2x - 4)e^{3x}$$

ដោយផ្អែកលើគុណត្រូវគ្នាគេបាន $\begin{cases} 2a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1, b = -4$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ $(F): y' - 3y = 0$ ៖

សមីការ $y' - 3y = 0$ មានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = 3$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ៖

$g(x) = ke^{3x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺជា

អនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) + g(x)$ ។

ចំពោះ $a = 1, b = -4$ នោះគេបាន $f(x) = (x^2 - 4x)e^{3x}$ និង $g(x) = ke^{3x}$

ដូចនេះ $y = (x^2 - 4x)e^{3x} + ke^{3x} = (x^2 - 4x + k)e^{3x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

៣.រកអនុគមន៍ $y = h(x)$ ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $y = h(x) = (x^2 - 4x + k)e^{3x}$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (C) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ៖

$y = 0$ សមមូល $(x^2 - 4x + k)e^{3x} = 0$ ឬ $x^2 - 4x + k = 0$ (*)

ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ h ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសលុះត្រាតែសមីការ

(*) មានឫសឌុបពេលគឺ $\Delta' = 4 - k = 0$ សមមូល $k = 4$ ។

ដូចនេះ $y = h(x) = (x^2 - 4x + 4)e^{3x} = (x - 2)^2 e^{3x}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៩

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y' - 4y = \frac{(2x - 4)e^{4x}}{x^2 - 4x + 5}$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{4x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់

សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (F): $y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{4x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F):

គេមាន (E): $y' - 4y = \frac{(2x - 4)e^{4x}}{x^2 - 4x + 5}$ និង (F): $y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$ ។

អនុគមន៍ $y = f(x) = e^{4x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$f'(x) - 4f(x) = \frac{(2x-4)e^{4x}}{x^2 - 4x + 5} \quad (1)$$

គេមាន $f(x) = e^{4x}g(x)$

$$\text{នោះ } f'(x) = 4e^{4x}g(x) + e^{4x}g'(x) = e^{4x}[4g(x) + g'(x)]$$

យក $f(x) = e^{4x}g(x)$ និង $f'(x) = e^{4x}[4g(x) + g'(x)]$ ជួសជុល(1) គេបាន៖

$$e^{4x}[4g(x) + g'(x)] - 4e^{4x}g(x) = \frac{(2x-4)e^{4x}}{x^2 - 4x + 5}$$

$$4e^{4x}g(x) + e^{4x}g'(x) - 4e^{4x}g(x) = \frac{(2x-4)e^{4x}}{x^2 - 4x + 5}$$

$$e^{4x}g'(x) = \frac{(2x-4)e^{4x}}{x^2 - 4x + 5} \quad \text{ឬ} \quad g'(x) = \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 5}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

ដូចនេះបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{4x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (F) : $y' = \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 5}$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

$$\text{គេមាន } (F): y' = \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\text{គេទាញបាន } y = \int \frac{(2x-4)dx}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\text{តាង } u = x^2 - 4x + 5 \text{ នោះ } du = (2x-4)dx$$

$$\text{គេបាន } y = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad \text{ដោយ } u = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$$

ដូចនេះ $y = g(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយ។

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ $y = f(x) = e^{4x} g(x)$

ដូចនេះ $y = f(x) = e^{4x} [\ln(x^2 - 4x + 5) + C]$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y' + 2y = \frac{(2x-1)e^{-2x}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{-2x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (F): $y' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{-2x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F):

គេមាន (E): $y' + 2y = \frac{(2x-1)e^{-2x}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ និង (F): $y' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ ។

អនុគមន៍ $y = f(x) = e^{-2x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពេលគឺ ៖

$$f'(x) + 2f(x) = \frac{(2x-1)e^{-2x}}{\sqrt{x^2-x+1}} \quad (1)$$

គេមាន $f(x) = e^{-2x}g(x)$

$$\text{នោះ } f'(x) = -2e^{-2x}g(x) + e^{-2x}g'(x) = e^{-2x}[-2g(x) + g'(x)]$$

យក $f(x) = e^{-2x}g(x)$ និង $f'(x) = e^{-2x}[-2g(x) + g'(x)]$ ជួសក្នុង(1) គេបាន៖

$$e^{-2x}[-2g(x) + g'(x)] + 2e^{-2x}g(x) = \frac{(2x-1)e^{-2x}}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$-2e^{-2x}g(x) + e^{-2x}g'(x) + 2e^{-2x}g(x) = \frac{(2x-1)e^{-2x}}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$e^{-2x}g'(x) = \frac{(2x-1)e^{-2x}}{\sqrt{x^2-x+1}} \quad \text{ឬ} \quad g'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) ។

ដូចនេះបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{-2x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ(F): $y' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E) ៖

$$\text{គេមាន (F): } y' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

គេទាញបាន $y = \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$

តាង $u = x^2 - x + 1$ នោះ $du = (2x-1)dx$

គេបាន $y = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$ ដោយ $u = x^2 - x + 1$

ដូចនេះ $y = g(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយ។

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ $y = f(x) = e^{-2x}g(x)$

ដូចនេះ $y = f(x) = e^{-2x} [2\sqrt{x^2 - x + 1} + C]$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y' - 3y = \frac{e^{3x} \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{3x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (F): $y' = \frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{3x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) :

$$\text{គេមាន (E): } y' - 3y = \frac{e^{3x} \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2} \quad \text{និង (F): } y' = \frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2} \text{ ។}$$

អនុគមន៍ $y = f(x) = e^{3x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ៖

$$f'(x) - 3f(x) = \frac{e^{3x} \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2} \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } y = f(x) = e^{3x} g(x)$$

$$\text{នោះ: } f'(x) = 3e^{3x} g(x) + e^{3x} g'(x) = e^{3x} [3g(x) + g'(x)]$$

យក $y = f(x) = e^{3x} g(x)$ និង $f'(x) = e^{3x} [3g(x) + g'(x)]$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$e^{3x} [3g(x) + g'(x)] - 3e^{3x} g(x) = \frac{e^{3x} \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$3e^{3x} g(x) + e^{3x} g'(x) - 3e^{3x} g(x) = \frac{e^{3x} \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$e^{3x} g'(x) = \frac{e^{3x} \sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2} \quad \text{ឬ} \quad g'(x) = \frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

ដូចនេះបើអនុគមន៍ $y = f(x) = e^{3x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

$$\text{នោះអនុគមន៍ } g \text{ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (F): } y' = \frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2} \text{ ។}$$

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

គេមាន $(F): y' = \frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$

គេទាញបាន $y = \int \frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx$

តាង $u = 1 + \cos^2 x$ នោះ $du = -2 \sin x \cos x dx = -\sin 2x dx$

គេបាន $y = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + C$ ដោយ $u = 1 + \cos^2 x$

ដូចនេះ $y = g(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x} + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយ។

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ $y = f(x) = e^{3x} g(x)$

ដូចនេះ $y = f(x) = \frac{e^{3x}}{1 + \cos^2 x} + C e^{3x}$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y' - y = 3x - 7$ ។

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 2y' - y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ៖

$$\text{គេមាន } (E): 2y' - y = 3x - 7$$

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ $2f'(x) - f(x) = 3x - 7$ (1)

ដោយ $f(x) = ax + b$ នោះ $f'(x) = a$ ហេតុនេះសមីការ(1) អាចសរសេរជា៖

$$2a - (ax + b) = 3x - 7 \quad \text{ឬ} \quad -ax + (2a - b) = 3x - 7$$

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = -7 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad a = -3, b = 1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $a = -3, b = 1$ ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ៖

$$\text{គេមាន } (E): 2y' - y = 3x - 7 \quad \text{និង} \quad (F): 2y' - y = 0$$

បើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ $y = f(x) + g(x)$

និង $y' = f'(x) + g'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ ៖

$$2[f'(x) + g'(x)] - [f(x) + g(x)] = 3x - 7$$

$$[2f'(x) - f(x)] + [2g'(x) - g(x)] = 3x - 7 \quad (2)$$

យកសមីការ(1) ជំនួសក្នុងសមីការ(2) គេបាន ៖

$$3x - 7 + [2g'(x) - g(x)] = 3x - 7 \quad \text{សមមូល} \quad 2g'(x) - g(x) = 0 \quad \text{នោះបញ្ជាក់}$$

ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 2y' - y = 0$ ។

ដូចនេះបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 2y' - y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

គេមាន (F) : $2y' - y = 0$ សមមូល $y' - \frac{1}{2}y = 0$ មានទម្រង់ទូទៅ $y' - \alpha y = 0$

ដែល $\alpha = \frac{1}{2}$ ។ ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$y = g(x) = k e^{\frac{x}{2}}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺជា

អនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ដោយ $f(x) = ax + b = -3x + 1$ និង $g(x) = k e^{\frac{x}{2}}$

ដូចនេះ $y = 3x - 1 + k e^{\frac{x}{2}}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y' + 5y = 9 \sin x + 7 \cos x$ ។

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $y' + 5y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ៖

គេមាន $(E): y' + 5y = 9\sin x + 7\cos x$

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = a\sin x + b\cos x$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ $f'(x) + 5f(x) = 9\sin x + 7\cos x$ (1)

ដោយ $f(x) = a\sin x + b\cos x$ នោះ $f'(x) = a\cos x - b\sin x$

ហេតុនេះសមីការ(1) អាចសរសេរជា៖

$$a\cos x - b\sin x + 5a\sin x + 5b\cos x = 9\sin x + 7\cos x$$

$$(5a - b)\sin x + (a + 5b)\cos x = 9\sin x + 7\cos x$$

គេទាញ $\begin{cases} 5a - b = 9 \\ a + 5b = 7 \end{cases}$ សមមូល $a = 2, b = 1$ ។

ដូចនេះ $a = 2, b = 1$ ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ៖

គេមាន $(E): y' + 5y = 9\sin x + 7\cos x$ និង $(F): y' + 5y = 0$

បើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ $y = f(x) + g(x)$ និង $y' = f'(x) + g'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$[f'(x) + g'(x)] + [f(x) + g(x)] = 9\sin x + 7\cos x$$

$$[f'(x) + 5f(x)] + [g'(x) + 5g(x)] = 9\sin x + 7\cos x \quad (2)$$

យកសមីការ(1) ជំនួសក្នុងសមីការ(2) គេបាន ៖

$$9\sin x + 7\cos x + [g'(x) + 5g(x)] = 9\sin x + 7\cos x$$

សមមូល $g'(x) + 5g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ(F): $y' + 5y = 0$ ។

ដូចនេះបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y' + 5y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)៖

គេមាន(F): $y' + 5y = 0$ មានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល $a = -5$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F)គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$y = g(x) = k e^{-5x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)គឺជាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ដោយ $f(x) = 2\sin x + \cos x$ និង $g(x) = k e^{-5x}$

ដូចនេះ $y = 2\sin x + \cos x + k e^{-5x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $3y' - y = 2(9 - 4x)e^{-x}$ ។

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $3y' - y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ៖

គេមាន $(E): 3y' - y = 2(9 - 4x)e^{-x}$

ដើម្បីឱ្យ $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ $3f'(x) - f(x) = 2(9 - 4x)e^{-x}$ (1)

ដោយ $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ នោះ $f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$

ហេតុនេះសមីការ(1) អាចសរសេរជា៖

$$3ae^{-x} - 3(ax + b)e^{-x} - (ax + b)e^{-x} = 2(9 - 4x)e^{-x}$$

$$(-4ax + 3a - 4b)e^{-x} = (-8x + 18)e^{-x}$$

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} -4a = -8 \\ 3a - 4b = 18 \end{cases} \text{សមមូល } a = 2, b = -3 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $a = 2, b = -3$ ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ៖

គេមាន $(E): 3y' - y = 2(9 - 4x)e^{-x}$ និង $(F): 3y' - y = 0$

បើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ $y = f(x) + g(x)$

និង $y' = f'(x) + g'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$3[f'(x) + g'(x)] - [f(x) + g(x)] = 2(9 - 4x)e^{-x}$$

$$[3f'(x) - f(x)] + [3g'(x) - g(x)] = 2(9 - 4x)e^{-x} \quad (2)$$

យកសមីការ(1) ជំនួសក្នុងសមីការ(2) គេបាន ៖

$$2(9 - 4x)e^{-x} + [3g'(x) - g(x)] = 2(9 - 4x)e^{-x}$$

សមមូល $3g'(x) - g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (F) : $3y' - y = 0$ ។

ដូចនេះបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ g

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $3y' - y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

គេមាន (F) : $3y' - y = 0$ សមមូល $y' - \frac{1}{3}y = 0$ មានទម្រង់ទូទៅ $y' - ay = 0$ ដែល

$a = \frac{1}{3}$ ។ ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់

ដោយ $y = g(x) = k e^{\frac{1}{3}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងទាញបានចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺជា

អនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ដោយ $f(x) = (2x - 3)e^{-x}$ និង $g(x) = k e^{\frac{1}{3}x}$

ដូចនេះ $y = (2x - 3)e^{-x} + k e^{\frac{1}{3}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$(E): xy' + (2x + 1)y = (3x + 1)e^x \quad \text{និង} \quad (F): y' + 2y = 0$$

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = xf(x) - xe^x$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់

សមីការ (F) ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ៖

គេមាន $(E): xy' + (2x + 1)y = (3x + 1)e^x$ និង $(F): y' + 2y = 0$

បើ $y = f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់
នឹងសមីការ (E) គឺ $xf'(x) + (2x + 1)f(x) = (3x + 1)e^x$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $g(x) = xf(x) - xe^x$ នោះ $g'(x) = f(x) + xf'(x) - e^x - xe^x$

គេបាន $g'(x) + 2g(x) = f(x) + xf'(x) - e^x - xe^x + 2xf(x) - 2xe^x$

$$g'(x) + 2g(x) = xf'(x) + (2x + 1)f(x) - (3x + 1)e^x \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន $g'(x) + 2g(x) = (3x + 1)e^x - (3x + 1)e^x = 0$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

គេមាន $(F): y' + 2y = 0$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនលំដាប់ទីមួយ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$y = g(x) = ke^{-2x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

ម្យ៉ាងទៀតតាម $g(x) = xf(x) - xe^x$ គេទាញ $f(x) = e^x + \frac{g(x)}{x}$ ដែល $x \neq 0$

ដូចនេះ $f(x) = e^x + k \frac{e^{-2x}}{x}$ (k : ចំនួនថេរ) ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + y = \frac{2x-2}{e^x}$

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{e^x}$ ជាចម្លើយមួយ
របស់សមីការ (E) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y' + y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{e^x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $f(x)$

និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពេលគឺ $f'(x) + f(x) = \frac{2x-2}{e^x}$ (1)

គេមាន $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{e^x} = (ax^2 + bx)e^{-x}$

គេបាន $f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx)e^{-x} = \frac{-ax^2 + 2ax - bx + b}{e^x}$

ទំនាក់ទំនង(1)ទៅជា $\frac{-ax^2 + 2ax - bx + b}{e^x} + \frac{ax^2 + bx}{e^x} = \frac{2x-2}{e^x}$

សមមូល $2ax + b = 2x - 2$ នោះគេទាញ $a = 1, b = -2$ ។

ដូចនេះ $a = 1, b = -2$ ។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y' + y = 0$ ៖

.បើអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)នោះវាត្រូវតែ

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) គឺ $f'(x) + g'(x) + f(x) + g(x) = \frac{2x-2}{e^x}$

$$\text{ឬ } [f'(x) + f(x)] + [g'(x) + g(x)] = \frac{2x-2}{e^x} \quad (2)$$

$$\text{យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន } \frac{2x-2}{e^x} + g'(x) + g(x) = \frac{2x-2}{e^x}$$

សមមូល $g'(x) + g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថា g ជាចម្លើយទូទៅរបស់ (F) ។

.បើអនុគមន៍ g ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) នោះ $g'(x) + g(x) = 0$ (3)

បូកសមីការ(1) និង(3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$[f'(x) + g'(x)] + [f(x) + g(x)] = \frac{2x-2}{e^x} \text{ នោះគេបាន } y = f(x) + g(x)$$

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $y' + y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

សមីការ (F) : $y' + y = 0$ មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$y = g(x) = k e^{-x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។ ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

គឺ $y = f(x) + g(x) = \frac{x^2 - 2x}{e^x} + k e^{-x} = \frac{x^2 - 2x + k}{e^x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $3y' - 2y = 2(2\cos x - \sin x)e^x$

១.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (a\cos x + b\sin x)e^x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $3y' - 2y = 0$

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (a \cos x + b \sin x)e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$3f'(x) - 2f(x) = 2(2 \cos x - \sin x)e^x \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = (a \cos x + b \sin x)e^x$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = (-a \sin x + b \cos x)e^x + (a \cos x + b \sin x)e^x$$

$$f'(x) = [(a + b) \cos x + (-a + b) \sin x]e^x$$

ទំនាក់ទំនង (1) ទៅជា ៖

$$3[(a + b) \cos x + (-a + b) \sin x]e^x - 2(a \cos x + b \sin x)e^x = 2(2 \cos x - \sin x)e^x$$

$$[(a + 3b) \cos x + (-3a + b) \sin x]e^x = (4 \cos x - 2 \sin x)e^x$$

ដោយផ្អែកលើលក្ខណៈត្រូវគ្នាគេបាន ៖

$$\begin{cases} a + 3b = 4 \\ -3a + b = -2 \end{cases} \quad \text{សមមូល } a = 1, b = 1 \text{ ។ ដូចនេះ } a = 1, b = 1 \text{ ។}$$

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $3y' - 2y = 0$ ៖

.បើអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះវាត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ៖

$$3[f'(x) + g'(x)] - 2[f(x) + g(x)] = 2(2\cos x - \sin x)e^x$$

$$\text{ឬ } [3f'(x) - 2f(x)] + [3g'(x) - 2g(x)] = 2(2\cos x - \sin x)e^x \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន

$$2(2\cos x - \sin x)e^x + 3g'(x) - 2g(x) = 2(2\cos x - \sin x)e^x$$

សមមូល $3g'(x) - 2g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថា g ជាចម្លើយទូទៅរបស់ (F) ។

.បើអនុគមន៍ g ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) នោះ $3g'(x) - 2g(x) = 0$ (3)

បូកសមីការ(1) និង(3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$3[f'(x) + g'(x)] - 2[f(x) + g(x)] = 2(2\cos x - \sin x)e^x$$

នោះគេបាន $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $3y' - 2y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

$$\text{សមីការ (F) : } 3y' - 2y = 0 \text{ សមមូល } y' - \frac{2}{3}y = 0$$

មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$y = g(x) = k e^{\frac{2}{3}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។ ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)

គឺ $y = f(x) + g(x) = (\cos x + \sin x)e^x + k e^{\frac{2}{3}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $2y' + 3y = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15$

១. ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ae^{-x} + bx^2 + cx + d$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 2y' + 3y = 0$

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ae^{-x} + bx^2 + cx + d$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $f'(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$2f'(x) + 3f(x) = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15 \quad (1)$$

គេមាន $f(x) = ae^{-x} + bx^2 + cx + d$ គេបាន $f'(x) = -ae^{-x} + 2bx + c$

ទំនាក់ទំនង(1)ទៅជា ៖

$$2(-ae^{-x} + 2bx + c) + 3(ae^{-x} + bx^2 + cx + d) = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15$$

$$ae^{-x} + 3bx^2 + (4b + 3c)x + (2c + 3d) = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15$$

ដោយផ្អែកលើលក្ខណៈត្រូវគ្នាគេបាន $a = 2, b = 1, c = -6, d = 9$ ។

ដូចនេះ $a = 2, b = 1, c = -6, d = 9$ ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $2y' + 3y = 0$ ៖

.បើអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះវាត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ៖

$$2[f'(x) + g'(x)] + 3[f(x) + g(x)] = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15$$

$$\text{ឬ } [2f'(x) + 3f(x)] + [2g'(x) + 3g(x)] = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15 \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន

$$2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15 + 2g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15$$

សមមូល $2g'(x) + 3g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថា g ជាចម្លើយទូទៅរបស់ (F) ។

.បើអនុគមន៍ g ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) នោះ $2g'(x) + 3g(x) = 0$ (3)

បូកសមីការ(1) និង(3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$2[f'(x) + g'(x)] + 3[f(x) + g(x)] = 2e^{-x} + 3x^2 - 14x + 15$$

នោះគេបាន $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $2y' + 3y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ៖

សមីការ (F): $2y' + 3y = 0$ សមមូល $y' + \frac{3}{2}y = 0$

មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$y = g(x) = k e^{-\frac{3}{2}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺ $y = f(x) + g(x)$

ដោយ $f(x) = 2e^{-x} + x^2 - 6x + 9 = 2e^{-x} + (x - 3)^2$ និង $g(x) = k e^{-\frac{3}{2}x}$

ដូចនេះ $y = f(x) + g(x) = 2e^{-x} + (x - 3)^2 + k e^{-\frac{3}{2}x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - 2y = 2e^x \cos x$

១.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \sqrt{2}e^x \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y' - 2y = 0$

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \sqrt{2}e^x \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ៖

$$\text{គេមាន } f(x) = \sqrt{2}e^x \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right)$$

$$f(x) = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = e^x (\sin x - \cos x) + e^x (\cos x + \sin x) = 2e^x \sin x$$

យក $f(x)$ និង $f'(x)$ ជំនួសក្នុង (E) គេបាន ៖

$$2e^x \sin x - 2(\sin x - \cos x)e^x = 2e^x \cos x$$

$$2e^x \sin x - 2e^x \sin x + 2e^x \cos x = 2e^x \cos x$$

$$2e^x \cos x = 2e^x \cos x \quad \text{ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ដូចនេះ $f(x) = \sqrt{2}e^x \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y' - 2y = 0$ ៖

គេមាន f ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) នោះ $f'(x) - 2f(x) = 2e^x \cos x$ (1)

.បើអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)នោះវាត្រូវតែ

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពោលគឺ៖

$$[f'(x) + g'(x)] - 2[f(x) + g(x)] = 2e^x \cos x$$

$$\text{ឬ } [f'(x) - 2f(x)] + [g'(x) - 2g(x)] = 2e^x \cos x \quad (2)$$

$$\text{យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន } 2e^x \cos x + g'(x) - 2g(x) = 2e^x \cos x$$

សមមូល $g'(x) - 2g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថា g ជាចម្លើយទូទៅរបស់(F) ។

.បើអនុគមន៍ g ជាចម្លើយរបស់សមីការ(F) នោះ $g'(x) - 2g(x) = 0$ (3)

បូកសមីការ(1) និង(3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$[f'(x) + g'(x)] - 2[f(x) + g(x)] = 2e^x \cos x \quad \text{នោះគេបាន } y = f(x) + g(x)$$

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែ
អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) : $y' - 2y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)៖

សមីការ (F) : $y' - 2y = 0$ មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$$y = g(x) = k e^{2x} \quad \text{ដែល } k \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺ $y = f(x) + g(x)$

$$\text{ដោយ } f(x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ និង } g(x) = k e^{2x}$$

$$\text{ដូចនេះ } y = f(x) + g(x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k e^{-2x} \text{ ដែល } k \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - y = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2}$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y' - y = 0$

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $(E): y' - y = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2}$

ដោយ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{(e^x + 1) - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ នោះ $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

គេបាន $f'(x) - f(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x - (e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$
 $= \frac{2e^x - e^{2x} + 1}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \frac{(2e^x - e^{2x} + 1)e^{-x}}{(e^{2x} + 2e^x + 1)e^{-x}} = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2}$

$$f'(x) - f(x) = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2} \quad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង(1) បញ្ជាក់ថា $f(x)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E)

ដូចនេះ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y' - 2y = 0$ ៖

.បើអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)នោះវាត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពោលគឺ៖

$$[f'(x) + g'(x)] - [f(x) + g(x)] = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2}$$

$$\text{ឬ } [f'(x) - f(x)] + [g'(x) - g(x)] = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2} \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន៖

$$\frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2} + g'(x) - g(x) = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2}$$

សមមូល $g'(x) - g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថា g ជាចម្លើយទូទៅរបស់(F) ។

.បើអនុគមន៍ g ជាចម្លើយរបស់សមីការ(F) នោះ $g'(x) - g(x) = 0$ (3)

បូកសមីការ(1) និង(3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$[f'(x) + g'(x)] - [f(x) + g(x)] = \frac{e^{-x} - e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2} \text{ នោះគេបាន } y = f(x) + g(x)$$

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y' - y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់(E)៖

សមីការ (F): $y' - y = 0$ មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$y = g(x) = k e^x$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺ

$$y = f(x) + g(x) \text{ ដោយ } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ និង } g(x) = k e^{2x}$$

ដូចនេះ $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + k e^x$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' - 3y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y = -x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 3)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$(E): y'' + 2y' - 3y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ នោះគេទាញបាន $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{c}{a} = -3$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^x + Be^{-3x}$ ។

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = Ae^x + Be^{-3x}$ នោះ $f'(x) = Ae^x - 3Be^{-3x}$

ដោយខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y = -x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 3)$

នោះគេបាន $\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f(0) = 3 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} A - 3B = -1 & (1) \\ A + B = 3 & (2) \end{cases}$

យក $(2) - (1): 4B = 4$ នោះ $B = 1$ ហើយតាម $(2): A = 3 - B = 3 - 1 = 2$ ។

ដូចនេះ $f(x) = 2e^x + e^{-3x}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 5y' + 4y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y = 5x - 1$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$(E): y'' - 5y' + 4y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ នោះគេទាញបាន $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{c}{a} = 4$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^x + Be^{4x}$ ។

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = Ae^x + Be^{4x}$ នោះ $f'(x) = Ae^x + 4Be^{4x}$

ដោយខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y = 5x - 1$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -1)$

នោះគេបាន $\begin{cases} f'(0) = 5 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} A + 4B = 5 & (1) \\ A + B = -1 & (2) \end{cases}$

$$\text{យក}(2)-(1): -3B = -6 \text{ នោះ } B = 2$$

$$\text{ហើយតាម}(2): A = -1 - B = -1 - 2 = -3 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = -3e^x + 2e^{4x} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៣

$$\text{គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល } (E): y'' - 6y' + 9y = 0 \text{ ។}$$

$$១. \text{ចូរដោះស្រាយសមីការ}(E) \text{ ។}$$

$$២. \text{ចូរកំណត់អនុគមន៍ } f \text{ ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ដោយដឹងថា}$$

$$\text{ខ្សែកោង}(C) \text{ តាង } f \text{ កាត់តាមពីរចំណុច } A(0, -1) \text{ និង } B(1, 0) \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

$$១. \text{ដោះស្រាយសមីការ}(E) \text{ ៖}$$

$$(E): y'' - 6y' + 9y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\text{សមមូល } (\lambda - 3)^2 = 0 \text{ មានឫសឌុប } \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ}(E) \text{ គឺ } y = (Ax + B)e^{3x} \text{ ។}$$

$$\text{ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

$$២. \text{កំណត់អនុគមន៍ } f \text{ ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ៖}$$

$$\text{គេមាន } f(x) = (Ax + B)e^{3x} \text{ ដោយខ្សែកោង}(C) \text{ តាង } f \text{ កាត់តាមពីរចំណុច}$$

$$A(0, -1) \text{ និង } B(1, 0) \text{ នោះ } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} B = -1 \\ (A + B)e^3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} B = -1 \\ A = -B = 1 \end{cases} \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = (x-1)e^{3x} \quad \text{។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 4y'' - 4y' + y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

ខ្សែកោង (C) តាង f កាត់តាមពីរចំណុច $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ និង $B(2, e)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$(E): 4y'' - 4y' + y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

សមមូល $(2\lambda - 1)^2 = 0$ មានឫសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = (Ax + B)e^{\frac{x}{2}}$ ។

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = (Ax + B)e^{3x}$ ដោយខ្សែកោង (C) តាង f កាត់តាមពីរចំណុច

$$A\left(\frac{3}{2}, 0\right) \text{ និង } B(2, e) \text{ នោះ: } \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f(2) = e \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} \left(\frac{3}{2}A + B\right)e^{\frac{9}{2}} = 0 \\ (2A + B)e = e \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} 3A + 2B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \text{ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន } A = 2, B = -3$$

$$\text{ដូចនេះ: } f(x) = (2x - 3)e^{\frac{x}{2}} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 5y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

$$f(0) = 1 \text{ និង } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$$(E): y'' - 4y' + 5y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2 \text{ គេទាញបាន } \lambda_1 = 2 - i, \lambda_2 = 2 + i \text{ នោះ: } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ}(E) \text{ គឺ } y = (A \cos x + B \sin x)e^{2x} \text{ ។}$$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = (A \cos x + B \sin x)e^{2x}$ ដោយ $f(0) = 1$ និង $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

គេបាន $\begin{cases} f(0) = A = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B\right)e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$ សមមូល $A = 1, B = -1$ ។

ដូចនេះ $f(x) = (\cos x - \sin x)e^{2x}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + 5y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

$$f(0) = 1 \quad \text{និង} \quad f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$(E): y'' - 2y' + 5y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\Delta' = 1 - 5 = -4 = 4i^2$ គេទាញបាន $\lambda_1 = 1 - 2i, \lambda_2 = 1 + 2i$ នោះ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$ ។

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^x$ ដោយ $f(0) = 1$ និង $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$

គេបាន $\begin{cases} f(0) = A = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B\right)e^{\frac{\pi}{8}} = 0 \end{cases}$ សមមូល $A = 1, B = -1$ ។

ដូចនេះ $f(x) = (\cos 2x - \sin 2x)e^x$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 7y' + 10y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា

$f(0) = -6$ និង $f(\ln 2) = 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$(E): y'' - 7y' + 10y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$\Delta' = 49 - 40 = 9$ គេទាញបាន $\lambda_1 = \frac{7-3}{2} = 2, \lambda_2 = \frac{7+3}{2} = 5$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^{2x} + Be^{5x}$ ។

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = Ae^{2x} + Be^{5x}$ ដោយ $f(0) = -6$ និង $f(\ln 2) = 4$

គេបាន $\begin{cases} A + B = -6 \\ Ae^{2\ln 2} + Be^{5\ln 2} = 4 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} A + B = -6 \\ 4A + 32B = 4 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $A = -7, B = 1$

ដូចនេះ $f(x) = -7e^{2x} + e^{5x}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាប (C) តាង f មានចំណុចរបត់ $I(0, 2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$(E): y'' - 2y' + y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\Delta' = 1 - 1 = 0$ គេទាញបានស្រប $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b'}{a} = 1$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = (Ax + B)e^x$ ។

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

$$\text{គេមាន } f(x) = (Ax + B)e^x$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x = (Ax + A + B)e^x$$

$$\text{និង } f''(x) = Ae^x + (Ax + A + B)e^x = (Ax + 2A + B)e^x$$

$$\text{ដោយក្រាប}(C) \text{ តាង } f \text{ មានចំណុចរបត់ } I(0,2) \text{ នោះ } \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

$$\text{បាន } \begin{cases} f''(0) = 2A + B = 0 \\ f(0) = B = 2 \end{cases} \text{ សមមូល } A = -1, B = 2 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = (-x + 2)e^x \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា
ក្រាប (C) តាង f មានចំណុចរបត់ $I(0,3)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$$(E): y'' - 3y' + 2y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$a + b + c = 0 \text{ គេទាញបាន } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{c}{a} = 2$$

$$\text{ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ}(E) \text{ គឺ } y = Ae^x + Be^{2x} \text{ ។}$$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

$$\text{គេមាន } f(x) = Ae^x + Be^{2x}$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = Ae^x + 2Be^{2x} \text{ និង } f''(x) = Ae^x + 4Be^{2x}$$

$$\text{ដោយក្រាប}(C) \text{ តាង } f \text{ មានចំណុចរូបតំលៃ } I(0,3) \text{ នោះ } \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

$$\text{បាន } \begin{cases} f''(0) = A + 4B = 0 \\ f(0) = A + B = 3 \end{cases} \text{ សមមូល } A = 4, B = -1 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = 4e^x - e^{2x} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' + y = 0$ ។

១. ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា
អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបស្មើ e ត្រង់ $x = -1$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

$$(E): y'' + 2y' + y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 1 = 0 \text{ គេទាញបានស្រប } \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ}(E)$$

$$\text{គឺ } y = (Ax + B)e^{-x} \text{ ។}$$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

$$\text{គេមាន } f(x) = (Ax + B)e^{-x}$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (-Ax + A - B)e^{-x}$$

$$\text{និង } f''(x) = -Ae^{-x} - (-Ax + A - B)e^{-x} = (Ax - 2A + B)e^{-x}$$

$$\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានអតិបរមាធៀបស្មើ } e \text{ ត្រង់ } x = -1 \text{ នោះ } \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) < 0 \\ f(-1) = e \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} (2A - B)e = 0 \\ (-3A + B)e < 0 \\ (-A + B)e = e \end{cases} \text{ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន } A = 1, B = 2 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = (x + 2)e^{-x} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៣១

$$\text{គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល } (E): y'' + 3y' + 2y = 0 \text{ ។}$$

$$១. \text{ចូរដោះស្រាយសមីការ}(E) \text{ ។}$$

$$២. \text{ចូរកំណត់អនុគមន៍ } f \text{ ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ}(E) \text{ ដោយដឹងថា}$$

$$\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ } -1 \text{ ត្រង់ } x = 0 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

$$១. \text{ដោះស្រាយសមីការ}(E) \text{ ៖}$$

$$(E): y'' + 3y' + 2y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$a - b + c = 0 \text{ គេទាញបាន } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{c}{a} = -2$$

$$\text{ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ}(E) \text{ គឺ } y = Ae^{-x} + Be^{-2x} \text{ ។}$$

$$\text{ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

២. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

គេបាន $f'(x) = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x}$ និង $f''(x) = Ae^{-x} + 4Be^{-2x}$

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបស្មើ -1 ត្រង់ $x = 0$ នោះ
$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

សមមូល
$$\begin{cases} -A - 2B = 0 \\ A + 4B > 0 \\ A + B = -1 \end{cases}$$
 បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $A = -2, B = 1$ ។

ដូចនេះ $f(x) = -2e^{-x} + e^{-2x}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y' + 3y = 3x^2 + 14x + 1$ ។

១. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' + 4y' + 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាប (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = 3x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ៖

ដើម្បីឲ្យពហុធាតុ $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$P(x), P'(x)$ និង $P''(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ ៖

$$P''(x) + 4P'(x) + 3P(x) = 3x^2 + 14x + 1 \quad (1)$$

គេមាន $P(x) = ax^2 + bx + c$ នោះ $P'(x) = 2ax + b$ និង $P''(x) = 2a$

ទំនាក់ទំនង (1) ទៅជា $2a + 4(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 3x^2 + 14x + 1$

$$\text{សមមូល } 3ax^2 + (8a + 3b)x + (2a + 4b + 3c) = 3x^2 + 14x + 1$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} 3a = 3 \\ 8a + 3b = 14 \\ 2a + 4b + 3c = 1 \end{cases} \quad \text{សមមូល } a = 1, b = 2, c = -3 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $a = 1, b = 2, c = -3$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

$$(F): y'' + 4y' + 3y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

ដោយ $b = a + c$ នោះគេទាញបាន $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{c}{a} = -3$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$$y = g(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x} \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

ម្យ៉ាងទៀតចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ $y = g(x) + P(x)$

$$\text{ដោយ } g(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x} \text{ និង } P(x) = x^2 + 2x - 3$$

ដូចនេះ $y = Ae^{-x} + Be^{-3x} + x^2 + 2x - 3$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

៣. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x} + x^2 + 2x - 3$

នោះ $f'(x) = -Ae^{-x} - 3Be^{-3x} + 2x + 2$

ដោយក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = 3x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$

នោះគេបាន $\begin{cases} f'(0) = 3 \\ f(0) = -2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} -A - 3B + 2 = 3 \\ A + B - 3 = -2 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} -A - 3B = 1 \\ A + B = 1 \end{cases}$ នោះ $A = 2, B = -1$ ។

ដូចនេះ $f(x) = 2e^{-x} - e^{-3x} + x^2 + 2x - 3$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 4y' + 4y = (x - 3)e^x$ ។

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = (ax + b)e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២. ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $y'' - 4y' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថាក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = -x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់ពីរចំនួនពិត a & b ៖

ដើម្បីឲ្យ $g(x) = (ax + b)e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$g(x), g'(x)$ និង $g''(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ ៖

$$g''(x) - 4g'(x) + 4g(x) = (x - 3)e^x \quad (1)$$

មាន $g(x) = (ax + b)e^x$ នោះ $g'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$

និង $g''(x) = ae^x + (ax + a + b)e^x = (ax + 2a + b)e^x$

ទំនាក់ទំនង(1)ទៅជា ៖

$$(ax + 2a + b)e^x - 4(ax + a + b)e^x + 4(ax + b)e^x = (x - 3)e^x$$

$$(ax - 2a + b)e^x = (x - 3)e^x$$

គេទាញបាន $a = 1$ និង $-2a + b = -3$ នោះ $b = -3 + 2 = -1$ ។

ដូចនេះ $a = 1, b = -1$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

$(F): y'' - 4y' + 4y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta' = 4 - 4 = 0$ មានឫសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b'}{a} = 2$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$y = h(x) = (Ax + B)e^{2x}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

ម្យ៉ាងទៀតចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ $y = g(x) + h(x)$

ដោយ $g(x) = (x - 1)e^x$ និង $h(x) = (Ax + B)e^{2x}$

ដូចនេះ $y = (x - 1)e^x + (Ax + B)e^{2x}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ។

៣. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = (x-1)e^x + (Ax+B)e^{2x}$

នោះ $f'(x) = e^x + (x-1)e^x + Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x}$

$$f'(x) = xe^x + (2Ax + A + 2B)e^{2x}$$

ដោយក្រាប (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = -x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$

នោះគេបាន $\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f(0) = -2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} A + 2B = -1 \\ -1 + B = -2 \end{cases}$ នោះ $A = 1, B = -1$ ។

ដូចនេះ $f(x) = (x-1)e^x + (x-1)e^{2x} = (x-1)(e^x + e^{2x})$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y = 3(\cos x + 2\sin x)$ ។

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = a\cos x + b\sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = 4x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 3)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a & b ៖

ដើម្បីឲ្យ $g(x) = a \cos x + b \sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ $g(x), g'(x)$ និង $g''(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ ៖

$$g''(x) + 4g(x) = 3(\cos x + 2\sin x) \quad (1)$$

$$\text{មាន } g(x) = a \cos x + b \sin x$$

$$\text{នោះ } g'(x) = -a \sin x + b \cos x \text{ និង } g''(x) = -a \cos x - b \sin x$$

ទំនាក់ទំនង (1) ទៅជា ៖

$$(-a \cos x - b \sin x) + 4(a \cos x + b \sin x) = 3(\cos x + 2\sin x)$$

$$3a \cos x + 3b \sin x = 3 \cos x + 6 \sin x$$

$$\text{គេទាញបាន } 3a = 3 \text{ និង } 3b = 6 \text{ នោះ } a = 1 \text{ និង } b = 2 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } a = 1, b = 2 \text{ ។}$$

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

$$(F): y'' + 4y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\text{គេទាញបាន } \lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i \text{ នោះ } \alpha = 0, \beta = 2$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ ៖

$$y = h(x) = A \cos 2x + B \sin 2x \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ } y = g(x) + h(x)$$

$$\text{ដោយ } g(x) = \cos x + 2 \sin x \text{ និង } h(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

$$\text{ដូចនេះ } y = \cos x + 2 \sin x + A \cos 2x + B \sin 2x \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ចំនួនថេរ។}$$

៣. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = \cos x + 2 \sin x + A \cos 2x + B \sin 2x$

នោះ $f'(x) = -\sin x + 2 \cos x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x$

ដោយក្រាប (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = 4x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 3)$

នោះគេបាន $\begin{cases} f'(0) = 4 \\ f(0) = 3 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} 2 + 2B = 4 \\ 1 + A = 3 \end{cases}$ នោះ $A = 2, B = 1$ ។

ដូចនេះ $f(x) = \cos x + 2 \sin x + 2 \cos 2x + \sin 2x$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + y = (1 - x)\cos x - \sin x$ ។

១. ចូរស្រាយថា $g(x) = \frac{1}{2}x \sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ចូរដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' - 2y' + y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = -x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយថា $g(x) = \frac{1}{2}x \sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $g(x) = \frac{1}{2}x \sin x$ នៅ៖ $g'(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x \cos x$

និង $g''(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x \sin x = \cos x - \frac{1}{2}x \sin x$

គេបាន $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = \cos x - \frac{1}{2}x \sin x - \sin x - x \cos x + \frac{1}{2}x \sin x$

$$g''(x) - 2g'(x) + g(x) = (1 - x)\cos x - \sin x$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $g(x) = \frac{1}{2}x \sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

$(F): y'' - 2y' + y = 0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

សមមូល $(\lambda - 1)^2 = 0$ មានឫសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$h(x) = (Ax + B)e^x$, A, B ជាចំនួនថេរ។

ម្យ៉ាងទៀតចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$y = g(x) + h(x) = \frac{1}{2}x \sin x + (Ax + B)e^x$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ។

៣.កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = \frac{1}{2}x \sin x + (Ax + B)e^x$

នោះគេបាន $f'(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x + (Ax + A + B)e^x$ ។

ដោយក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = -x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$

នោះគេបាន $\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f(0) = -2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} A + B = -1 \\ B = -2 \end{cases}$ នោះ $A = 1, B = -2$ ។

ដូចនេះ $f(x) = \frac{1}{2} x \sin x + (x - 2)e^x$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $-y'' - y' + 2y = \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3}$ ។

១. ចូរស្រាយថា $g(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២. ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $-y'' - y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា

ក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = \frac{1}{8}x + \frac{13}{4}$ ត្រង់ចំណុច $M\left(0, \frac{13}{4}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយថា $g(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ៖

$$\text{គេមាន } g(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)} = \frac{(e^x + 1) - 1}{2(e^x + 1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(e^x + 1)}$$

$$\text{នោះ } g'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{(e^x + 1) - 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{និង } g''(x) = -\frac{1}{2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} + \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}$$

$$\text{គេបាន } -g''(x) - g'(x) + 2g(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} - \frac{1}{2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$-g''(x) - g'(x) + 2g(x) = \frac{-e^x + e^x(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^3}$$

$$-g''(x) - g'(x) + 2g(x) = \frac{e^{3x} + 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3}$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $g(x) = \frac{1}{2}x \sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

$$(F): -y'' - y' + 2y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } -\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\text{ដោយ } a + b + c = 0 \text{ មានឫសឌុប } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \text{ ។}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$h(x) = Ae^x + Be^{-2x}, A, B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

ម្យ៉ាងទៀតចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$y = g(x) + h(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)} + Ae^x + Be^{-2x} \quad \text{ដែល } A, B : \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

៣. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)៖

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)} + Ae^x + Be^{-2x}$$

$$\text{នោះគេបាន } f'(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)^2} + Ae^x - 2Be^{-2x} \quad \text{។}$$

ដោយក្រាប(C)តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d) : $y = \frac{1}{8}x + \frac{13}{4}$ ត្រង់ចំណុច $M\left(0, \frac{13}{4}\right)$

$$\text{នោះគេបាន } \begin{cases} f'(0) = \frac{1}{8} \\ f(0) = \frac{13}{4} \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} \frac{1}{8} + A - 2B = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} + A + B = \frac{13}{4} \end{cases} \quad \text{នោះ } A = 2, B = 1$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = \frac{e^x}{2(e^x + 1)} + 2e^x + e^{-2x} \quad \text{។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $2y'' - 3y' + y = -x + 5 + 6e^{-x}$ ។

១. ចូរកំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + ce^{-x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២. ចូរស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) : $2y'' - 3y' + y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ៖

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + ce^{-x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែវា

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពេលគឺ ៖

$$2f''(x) - 3f'(x) + f(x) = -x + 5 + 6e^{-x} \quad (1)$$

គេមាន $f(x) = ax + b + ce^{-x}$ នោះ $f'(x) = a - ce^{-x}$ និង $f''(x) = ce^{-x}$

ទំនាក់ទំនង(1) ទៅជា $2ce^{-x} - 3(a - ce^{-x}) + (ax + b + ce^{-x}) = -x + 5 + 6e^{-x}$

សមមូល $ax + (-3a + b) + 6ce^{-x} = -x + 5 + 6e^{-x}$

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} a = -1 \\ -3a + b = 5 \\ 6c = 6 \end{cases} \text{សមមូល } a = -1, b = 2, c = 1 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $a = -1, b = 2, c = 1$ ។

២.ស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $2y'' - 3y' + y = 0$ ៖

គេមាន (E): $2y'' - 3y' + y = -x + 5 + 6e^{-x}$ និង (F): $2y'' - 3y' + y = 0$

បើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)នោះ $y = f(x) + g(x)$

$y' = f'(x) + g'(x)$ និង $y'' = f''(x) + g''(x)$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E)

$$\text{គេបាន } 2[f''(x) + g''(x)] - 3[f'(x) + g'(x)] + [f(x) + g(x)] = -x + 5 + 6e^{-x}$$

$$[2f''(x) - 3f'(x) + f(x)] + [2g''(x) - 3g'(x) + g(x)] = -x + 5 + 6e^{-x} \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន ៖

$$-x + 5 + 6e^{-x} + [2g''(x) - 3g'(x) + g(x)] = -x + 5 + 6e^{-x}$$

គេទាញ $2g''(x) - 3g'(x) + g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) ។

ដូចនេះបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $2y'' - 3y' + y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ៖

$$(F): 2y'' - 3y' + y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\text{ដោយ } a + b + c = 0 \text{ នោះ } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$y = g(x) = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x} \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$y = f(x) + g(x) \text{ ដោយ } f(x) = -x + 2 + e^{-x} \text{ និង } g(x) = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{ដូចនេះ } y = -x + 2 + e^{-x} + Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x} \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 5y' + 6y = 4e^x - 2e^{4x}$ ។

១.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ae^x + be^{4x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២.ចូរស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' - 5y' + 6y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីចំនួនពិត a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ae^x + be^{4x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែវា

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ ៖

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 4e^x - 2e^{4x} \quad (1)$$

មាន $f(x) = ae^x + be^{4x}$ នោះ $f'(x) = ae^x + 4be^{4x}$ និង $f''(x) = ae^x + 16be^{4x}$

ទំនាក់ទំនង (1) ទៅជា ៖

$$ae^x + 16be^{4x} - 5(ae^x + 4be^{4x}) + 6(ae^x + be^{4x}) = 4e^x - 2e^{4x}$$

$$2ae^x + 2be^{4x} = 4e^x - 2e^{4x}$$

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} 2a = 4 \\ 2b = -2 \end{cases} \text{ សមមូល } a = 2, b = -1 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $a = 2, b = -1$ ។

២. ស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' - 5y' + 6y = 0$ ៖

គេមាន $(E): y'' - 5y' + 6y = 4e^x - 2e^{4x}$ និង $(F): y'' - 5y' + 6y = 0$

បើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ $y = f(x) + g(x)$

$y' = f'(x) + g'(x)$ និង $y'' = f''(x) + g''(x)$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E)

$$\text{គេបាន } 2[f''(x) + g''(x)] - 5[f'(x) + g'(x)] + 6[f(x) + g(x)] = 4e^x - 2e^{4x}$$

$$[f''(x) - 5f'(x) + 6f(x)] + [g''(x) - 5g'(x) + 6g(x)] = 4e^x - 2e^{4x} \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង(2) គេបាន ៖

$$4e^x - 2e^{4x} + [g''(x) - 5g'(x) + 6g(x)] = 4e^x - 2e^{4x}$$

គេទាញ $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) ។

ដូចនេះបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' - 5y' + 6y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ៖

$$(F): y'' - 5y' + 6y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\text{សមមូល } (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \text{ នោះ } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 \text{ ។}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$y = g(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$y = f(x) + g(x) \text{ ដោយ } f(x) = 2e^x - e^{4x} \text{ និង } g(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

$$\text{ដូចនេះ } y = 2e^x - e^{4x} + Ae^{2x} + Be^{3x} \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

លំហាត់ទី៣៩

$$\text{គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល } (E): y'' - 2y' + 2y = 6x + 2 \text{ ។}$$

$$១. \text{ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត } a \text{ និង } b \text{ ដើម្បីឲ្យ } f(x) = ax + b$$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២.ចូរស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' - 2y' + 2y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់ពីចំនួនពិត a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែវា

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពេលគឺ ៖

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 6x + 2 \quad (1)$$

$$\text{មាន } f(x) = ax + b \text{ នោះ } f'(x) = a \text{ និង } f''(x) = 0$$

$$\text{ទំនាក់ទំនង(1) ទៅជា } 0 - 2(a) + 2(ax + b) = 6x + 2$$

$$2ax - 2a + 2b = 6x + 2$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} 2a = 6 \\ -2a + 2b = 2 \end{cases} \text{ សមមូល } a = 3, b = 4 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } a = 3, b = 4 \text{ ។}$$

២.ស្រាយថាបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' - 2y' + 2y = 0$ ៖

$$\text{គេមាន } (E): y'' - 2y' + 2y = 6x + 2 \text{ និង } (F): y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$\text{បើ } y = f(x) + g(x) \text{ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះ } y = f(x) + g(x)$$

$y' = f'(x) + g'(x)$ និង $y'' = f''(x) + g''(x)$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E)

$$\text{គេបាន } 2[f''(x) + g''(x)] - 2[f'(x) + g'(x)] + 2[f(x) + g(x)] = 6x + 2$$

$$[f''(x) - 2f'(x) + 2f(x)] + [g''(x) - 2g'(x) + 2g(x)] = 6x + 2 \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង(3) គេបាន ៖

$$6x + 2 + [g''(x) - 2g'(x) + 2g(x)] = 6x + 2$$

គេទាញ $g''(x) - 2g'(x) + 2g(x) = 0$ នោះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) ។

ដូចនេះបើ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) : $y'' - 2y' + 2y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ៖

$$(F) : y'' - 2y' + 2y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2 \text{ នោះ } \lambda_1 = 1 - i, \lambda_2 = 1 + i \text{ ។}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$y = g(x) = (A \cos x + B \sin x)e^x \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$y = f(x) + g(x) \text{ ដោយ } f(x) = 3x + 4 \text{ និង } g(x) = (A \cos x + B \sin x)e^x$$

$$\text{ដូចនេះ } y = 3x + 4 + (A \cos x + B \sin x)e^x \text{ ដែល } A \text{ និង } B \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' + 9y = (13x - 9)e^{2x}$ ។

១.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (ax + b)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

២.ស្រាយថា $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' + 9y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់ពីចំនួនពិត a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = (ax + b)e^{2x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែវា

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពេលគឺ ៖

$$f''(x) + 9f(x) = (13x - 9)e^{2x} \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = (ax + b)e^{2x}$$

$$\text{នោះ } f'(x) = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}$$

$$\text{និង } f''(x) = 2ae^{2x} + 2(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}$$

$$\text{ទំនាក់ទំនង(1) ទៅជា } (4ax + 4a + 4b)e^{2x} + 9(ax + b)e^{2x} = (13x - 9)e^{2x}$$

$$(13ax + 4a + 13b)e^{2x} = (13x - 9)e^{2x}$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} 13a = 13 \\ 4a + 13b = -9 \end{cases} \text{ សមមូល } a = 1, b = -1 \text{ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } a = 1, b = -1 \text{ ។}$$

២.ស្រាយថា $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' + 9y = 0$ ៖

.បើអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E)នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពោលគឺ ៖

$$[f''(x) + g''(x)] + 9[f(x) + g(x)] = (13x - 9)e^{2x}$$

$$[f''(x) + 9f'(x)] + [g''(x) + 9g(x)] = (13x - 9)e^{2x} \quad (2)$$

យកសមីការ(1) ជួសក្នុងសមីការ(2) គេបាន ៖

$$(13x - 9)e^{2x} + [g''(x) + 9g(x)] = (13x - 9)e^{2x} \quad \text{ឬ} \quad g''(x) + 9g(x) = 0$$

នោះគេទាញបានអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(F) ។

.បើអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(F) នោះ $g''(x) + 9g(x) = 0$ (3)

បូកសមីការ(1)និង(3) គេបាន៖

$$[f''(x) + g''(x)] + 9[f(x) + g(x)] = (13x - 9)e^{2x} \quad \text{នោះគេទាញថាអនុគមន៍}$$

$$y = f(x) + g(x) \text{ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ}(E) \text{ ។}$$

ដូចនេះ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $y'' + 9y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ៖

$$(F): y'' + 9y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 + 9 = 0 \text{ មានឫស } \lambda_1 = -3i, \lambda_2 = 3i$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅសមីការ(F)គឺ $y = A \cos 3x + B \sin 3x$, A, B : ថេរ។

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$

$$\text{ដោយ } f(x) = (x - 1)e^{2x} \text{ និង } g(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$$

ដូចនេះ $y = (x - 1)e^{2x} + A \cos 3x + B \sin 3x$ ដែល A & B ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y'' - 2y' - y = 8\sin x - 6\cos x$ ។

១. ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = a\cos x + b\sin x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

២. ស្រាយថា $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 3y'' - 2y' - y = 0$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ $f(x) = a\cos x + b\sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពេលគឺ ៖

$$3f''(x) - 2f'(x) - f(x) = 8\sin x - 6\cos x \quad (1)$$

គេមាន $f(x) = a\cos x + b\sin x$

នោះ $f'(x) = -a\sin x + b\cos x$ និង $f''(x) = -a\cos x - b\sin x$

ទំនាក់ទំនង (1) ទៅជា ៖

$$3(-a\cos x - b\sin x) - 2(-a\sin x + b\cos x) - (a\cos x + b\sin x) = 8\sin x - 6\cos x$$

$$(-4a - 2b)\cos x + (2a - 4b)\sin x = 8\sin x - 6\cos x$$

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} -4a - 2b = -6 \\ 2a - 4b = 8 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad a = 2, b = -1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $a = 2, b = -1$ ។

២. ស្រាយថា $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): 3y'' - 2y' - y = 0$ ៖

.បើអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះវាត្រូវ

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ពេលគឺ ៖

$$3[f''(x) + g''(x)] - 2[f'(x) + g'(x)] - [f(x) + g(x)] = 8\sin x - 6\cos x$$

$$[3f''(x) - 2f'(x) - f(x)] + [3g''(x) - 2g'(x) - g(x)] = 8\sin x - 6\cos x \quad (2) \text{ យក}$$

សមីការ(1) ជួសក្នុងសមីការ(2) គេបាន ៖

$$8\sin x - 6\cos x + [3g''(x) - 2g'(x) - g(x)] = 8\sin x - 6\cos x \quad (2)$$

$$\text{ឬ } 3g''(x) - 2g'(x) - g(x) = 0$$

នោះគេទាញបានអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(F) ។

.បើអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(F) នោះ

$$3g''(x) - 2g'(x) - g(x) = 0 \quad (3)$$

បូកសមីការ(1)និង(3) គេបាន៖

$$3[f''(x) + g''(x)] - 2[f'(x) + g'(x)] - [f(x) + g(x)] = 8\sin x - 6\cos x$$

នោះគេទាញថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

ដូចនេះ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(F): $3y'' - 2y' - y = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ(F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ៖

$$(F): 3y'' - 2y' - y = 0 \text{ មានសមីការសម្គាល់ } 3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$a + b + c = 0 \text{ នោះគេទាញបាន } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅសមីការ(F)គឺ $y = Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x}$, A, B : ថេរ។

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) គឺជាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$

ដោយ $f(x) = 2\cos x - \sin x$ និង $g(x) = Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x}$

ដូចនេះ $y = 2\cos x - \sin x + Ae^x + Be^{-\frac{1}{3}x}$ ដែល A & B ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 30x + 4)e^{2x}$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = e^{2x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' = 12x^2 - 30x + 4$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) បើគេដឹងថា

ខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(T): y = 2x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0,3)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = e^{2x}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' = 12x^2 - 30x + 4$ ៖

$$(E): y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 30x + 4)e^{2x}$$

$$\text{គេមាន } y = e^{2x}g(x)$$

$$\text{នោះ } y' = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) = e^{2x}[2g(x) + g'(x)]$$

$$\text{ហើយ } y'' = 2e^{2x}[2g(x) + g'(x)] + e^{2x}[2g'(x) + g''(x)]$$

$$y'' = e^{2x}[4g(x) + 4g'(x) + g''(x)]$$

បើអនុគមន៍ $y = e^{2x}g(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$e^{2x}[4g(x) + 4g'(x) + g''(x)] - 4e^{2x}[2g(x) + g'(x)] + 4e^{2x}g(x) = (12x^2 - 30x + 4)e^{2x}$$

ដោយសម្រួលអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង e^{2x} គេបាន ៖

$$4g(x) + 4g'(x) + g''(x) - 8g(x) - 4g'(x) + 4g(x) = 12x^2 - 30x + 4$$

ឬ $g''(x) = 12x^2 - 30x + 4$ ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

២.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $(F): y'' = 12x^2 - 30x + 4$

គេទាញបាន $y' = \int (12x^2 - 30x + 4) dx$

$$y' = 4x^3 - 15x^2 + 4x + C_1$$

គេទាញបាន $y = \int (4x^3 - 15x^2 + 4x + C_1) dx$

ដូចនេះ $y = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2$ ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរ។

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) កំណត់ដោយ ៖

$y = e^{2x} g(x) = e^{2x} (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2)$ ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរ។

៣.កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

គេមាន $f(x) = e^{2x} (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2)$ នោះគេបានដេរីវេ

$$f'(x) = 2e^{2x} (x^4 - 5x^3 + 2x^2 + C_1x + C_2) + e^{2x} (4x^3 - 15x^2 + 4x + C_1)$$

$$f'(x) = e^{2x} (2x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 2C_1x + 4x + 2C_2 + C_1)$$

ដោយខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹង $(T): y = 2x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 3)$

$$\text{នោះគេបាន} \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f(0) = 3 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} 2C_2 + C_1 = 2 \\ C_2 = 3 \end{cases} \text{ នោះ } C_1 = -4, C_2 = 3$$

ដូចនេះ $f(x) = e^{2x} (x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3)$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \cos^2 x$ ។

១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = e^{3x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' = \cos^2 x$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) បើគេដឹងថា

ខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(T): y = 3x + 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y = e^{3x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

អនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' = \cos^2 x$ ៖

$$(E): y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \cos^2 x$$

$$\text{គេមាន } y = e^{3x} g(x)$$

$$\text{នោះ } y' = 3e^{3x} g(x) + e^{3x} g'(x) = e^{3x} [3g(x) + g'(x)]$$

$$\text{ហើយ } y'' = 3e^{3x} [3g(x) + g'(x)] + e^{3x} [3g'(x) + g''(x)]$$

$$y'' = e^{2x} [9g(x) + 6g'(x) + g''(x)]$$

បើអនុគមន៍ $y = e^{3x} g(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ ៖

$$e^{3x} [9g(x) + 6g'(x) + g''(x)] - 6e^{2x} [3g(x) + g'(x)] + 9e^{2x} g(x) = e^{3x} \cos^2 x$$

ដោយសម្រួលអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង e^{3x} គេបាន ៖

$$9g(x) + 6g'(x) + g''(x) - 18g(x) - 6g'(x) + 9g(x) = \cos^2 x$$

ឬ $g''(x) = \cos^2 x$ នោះអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

$$\text{គេមាន } (F): y'' = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{គេទាញបាន } y' = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C_1$$

$$\text{គេទាញបាន } y = \frac{1}{2} \int \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) dx + C_1 x + C_2$$

$$\text{ដូចនេះ } y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2x \right) + C_1 x + C_2 \text{ ដែល } C_1, C_2 \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

ហើយចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) កំណត់ដោយ ៖

$$y = e^{3x} g(x) = e^{3x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2x \right) + C_1 x + C_2 \right]$$

ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរ។

៣. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ៖

$$\text{គេមាន } f(x) = e^{3x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2x \right) + C_1 x + C_2 \right] \text{ នោះគេបានដេរីវេ}$$

$$f'(x) = 3e^{3x} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \cos 2x + C_1 x + C_2 \right) + e^{3x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \right)$$

ដោយខ្សែកោង (C) តាង f ប៉ះនឹង $(T): y = 3x + 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 2)$

$$\text{នោះគេបាន } \begin{cases} f'(0) = 3 \\ f(0) = 2 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} 3C_2 + C_1 = 3 \\ C_2 = 2 \end{cases} \text{ នោះ } C_1 = -3, C_2 = 2$$

ដូចនេះ $f(x) = e^{3x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2x \right) - 3x + 2 \right]$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - y' + \frac{1}{4}y = (2x^2 + 1)\sqrt{e^{2x^2+x}}$ ។

១. ឧបមាថា $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ។

ចូរស្រាយថាបើ $y = e^{\frac{x}{2}} \varphi(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ $\varphi(x)$

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $y'' = (2x^2 + 1)e^{x^2}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាបើ $y = e^{\frac{x}{2}} \varphi(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ $\varphi(x)$

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) : $y'' = (2x^2 + 1)e^{x^2} \quad \div$

គេមាន (E) : $y'' - y' + \frac{1}{4}y = (2x^2 + 1)\sqrt{e^{2x^2+x}}$

បើ $y = e^{\frac{x}{2}} \varphi(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ y, y', y'' ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់
នឹងសមីការ (E) ។

គេមាន $y = e^{\frac{x}{2}} \varphi(x)$ នោះ $y' = \left[\frac{1}{2} \varphi(x) + \varphi'(x) \right] e^{\frac{x}{2}}$

ហើយ $y'' = \left[\frac{1}{2} \varphi'(x) + \varphi''(x) \right] e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \varphi(x) + \varphi'(x) \right] e^{\frac{x}{2}}$

$$y'' = \left[\frac{1}{4} \varphi(x) + \varphi'(x) + \varphi''(x) \right] e^{\frac{x}{2}} \quad ។$$

យក y, y', y'' ជំនួសក្នុងសមីការ (E) គេទទួលបាន ៖

$$\left[\frac{1}{4} \varphi(x) + \varphi'(x) + \varphi''(x) \right] e^{\frac{x}{2}} - \left[\frac{1}{2} \varphi(x) + \varphi'(x) \right] e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{4} \varphi(x) e^{\frac{x}{2}} = (2x^2 + 1) e^{x^2 + \frac{x}{2}}$$

បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន $\varphi''(x) = (2x^2 + 1) e^{x^2}$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\varphi(x)$ ជាចម្លើយសមីការ $(F): y'' = (2x^2 + 1) e^{x^2}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

យើងមាន $(F): y'' = (2x^2 + 1) e^{x^2}$

យើងទាញបាន $y' = \int (2x^2 + 1) e^{x^2} dx = \int 2x^2 e^{x^2} dx + \int e^{x^2} dx$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = 2xe^{x^2} \end{cases} \quad \text{នោះ: } \begin{cases} du = dx \\ v = \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \end{cases}$$

គេបាន $\int 2x^2 e^{x^2} dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2} dx + C_1$ នោះ $y' = xe^{x^2} + C_1$

គេទាញ $y = \int (xe^{x^2} + C_1) dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 x + C_2$

ដូចនេះ $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 x + C_2$

ម្យ៉ាងទៀតចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) គឺ $y = e^{\frac{x}{2}} \varphi(x)$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $y = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 x + C_2 \right)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ទី៤៥

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$១. y' + 2y = (2x^2 + 1)e^{(x-1)^2}$$

$$២. y'' - 4y' + 4y = (\sin^6 x + \cos^6 x)e^{2x}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$១. y' + 2y = (2x^2 + 1)e^{(x-1)^2}$$

តាង $y = e^{-2x} f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការនោះ y និង y' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ។

គេមាន $y' = -2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x)$ នោះសមីការក្លាយទៅជា ៖

$$-2e^{-2x} f(x) + e^{-2x} f'(x) + 2e^{-2x} f(x) = (2x^2 + 1)e^{(x-1)^2}$$

$$e^{-2x} f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{គេទាញ } f(x) = \int (2x^2 + 1)e^{x^2 + 1} dx = \int 2x^2 e^{x^2 + 1} dx + \int e^{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = 2xe^{x^2 + 1} dx \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = dx \\ v = \int 2xe^{x^2 + 1} dx = e^{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } \int 2x^2 e^{x^2 + 1} dx = xe^{x^2 + 1} + C - \int e^{x^2 + 1} dx \quad (2)$$

យក(2) ជួសក្នុង(1) គេបាន $f(x) = xe^{x^2 + 1} + C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y = (xe^{x^2 + 1} + C)e^{-2x}$, C ជាចំនួនថេរ។

$$២. y'' - 4y' + 4y = (\sin^6 x + \cos^6 x)e^{2x}$$

គេមាន $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

គេបាន $y'' - 4y' + 4y = \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \right) e^{2x}$

តាង $y = e^{2x} g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការនោះ y, y', y'' ផ្ទៀងផ្ទាត់ និងសមីការ។

គេមាន $y' = [2g(x) + g'(x)]e^{2x}$ និង $y'' = [4g(x) + 4g'(x) + g''(x)]e^{2x}$
សមីការអាចសរសេរទៅជា ៖

$$[4g(x) + 4g'(x) + g''(x) - 8g(x) - 4g'(x) + 4g(x)]e^{2x} = \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \right) e^{2x}$$

ឬ $g''(x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$

នោះគេទាញ $g'(x) = \int \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32} \sin 4x + C_1$

ហើយ $g(x) = \int \left(\frac{5}{8}x + \frac{3}{32} \sin 4x + C_1 \right) dx$

$$g(x) = \frac{5}{16}x^2 - \frac{3}{128} \cos 4x + C_1x + C_2$$

ដូចនេះ $y = \left(\frac{5}{16}x^2 - \frac{3}{128} \cos 4x + C_1x + C_2 \right) e^{2x}$ ដែល C_1, C_2 ថេរ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): \frac{2xy}{1+x^2} + y' \ln(1+x^2) = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x$ ។

១. ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ បើ $y = \frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(F): \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x \quad \text{។}$$

២. អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ ។ គណនា $g'(x)$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. គេមាន $y = \frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}$ នោះ $f(x) = y \ln(1+x^2)$

$$\text{គេបាន } f'(x) = y' \ln(1+x^2) + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2xy}{1+x^2} + y' \ln(1+x^2) \quad (1)$$

$$\text{ដោយគេមាន } \frac{2xy}{1+x^2} + y' \ln(1+x^2) = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x \quad (2)$$

$$\text{នោះគេទាញ } f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x \quad \text{ឬ} \quad \frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 e^x$$

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ បើ $y = \frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(F) : \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 e^x \quad \text{។}$$

២. គណនា $g'(x)$

$$\text{អនុគមន៍ } g \text{ កំណត់លើ } \mathbb{R} \text{ ដោយ } g(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$\text{យើងបាន } g'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-2x+x^2)e^x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 e^x$$

$$\text{ដូចនេះ } g'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 e^x \quad \text{។}$$

៣. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

$$\text{គេមាន } (F) : \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 e^x \quad \text{ឬ} \quad \frac{df(x)}{dx} = g'(x)$$

$$\text{គេទាញ } f(x) = \int g'(x) dx = g(x) + C \quad \text{ដែល } C \text{ ជាចំនួនថេរ ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} + C \quad \text{ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។}$$

$$\text{ហើយ } y = \frac{\frac{e^x}{1+x^2} + C}{\ln(1+x^2)} = \frac{e^x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} + \frac{C}{\ln(1+x^2)} \quad \text{ជាចម្លើយទូទៅ}$$

របស់សមីការ (E) ។

លំហាត់ទី៤៧

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 2y' + 2y = 2e^x(\sin x + 2\cos x)$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x(\sin x + 2\cos x)$$

តាង $y = e^x z$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការនោះ y, y', y'' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេមាន $y' = (z + z')e^x$ និង $y'' = (z + 2z' + z'')e^x$ នោះសមីការក្លាយទៅជា

$$(z + 2z' + z'' - 2z - 2z' + 2z)e^x = 2e^x(\sin x + 2\cos x)$$

$$\text{ឬ } z'' + z = 2\sin x + 4\cos x \quad (1)$$

តាង $z_p = x(a\cos x + b\sin x)$ ជាចម្លើយពិសេសរបស់មួយនោះ z_p និង z_p'' ត្រូវ

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(1) គឺ $z_p'' + z_p = 2\sin x + 4\cos x \quad (2) \quad \text{។}$

$$\text{គេមាន } z_p' = a\cos x + b\sin x + x(-a\sin x + b\cos x)$$

$$\text{និង } z_p'' = -a \sin x + b \cos x - a \sin x + b \cos x + x(-a \cos x - b \sin x)$$

$$z_p'' = -2a \sin x + 2b \cos x - x(a \cos x + b \sin x)$$

$$z_p'' = -2a \sin x + 2b \cos x - z_p \quad \text{ឬ} \quad z_p'' + z_p = -2a \sin x + 2b \cos x \quad (3)$$

$$\text{តាម (2) \& (3) គេបាន } \begin{cases} -2a = 2 \\ 2b = 4 \end{cases} \text{ នោះ } a = -1, b = 2 \text{ ។}$$

$$\text{គេបានចម្លើយពិសេសគឺ } z_p = x(-\cos x + 2 \sin x) \text{ ។}$$

ចម្លើយអូម៉ូហ្សែននៃសមីការ(1)គឺ z_h ដែល $z_h'' + z_h = 0$ មានសមីការសម្គាល់

$$\lambda^2 + 1 = 0 \text{ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច } \lambda = \pm i \text{ នោះ } \alpha = 0, \beta = 1 \text{ ។}$$

គេបានចម្លើយអូម៉ូហ្សែន $z_h = A \cos x + B \sin x$, A, B ជាចំនួនថេរ។

$$\text{ចម្លើយទូទៅនៃ (1) គឺ } z = z_p + z_h = (A - x) \cos x + (2x + B) \sin x \text{ ។}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងដើមគឺ៖

$$y = e^x [(A - x) \cos x + (2x + B) \sin x] \text{ ដែល } A, B: \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

www.mathtodaywordpress.com

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): (1+x^2)y'' - 2(1-x)^2y' + (1-x)(3-x)y = \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$(F): y'' - 2y' + y = \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2} \quad ។$$

១. ចូរស្រាយថាបើ $y = \frac{f(x)}{1+x^2}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះ

អនុគមន៍ f ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ។

២. គេតាង $f(x) = e^x g(x)$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។ ចូរស្រាយអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅ

$$\text{នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល } (G): y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad ។$$

៣. ចូរកំណត់អនុគមន៍ g និង f រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយថាបើ $y = \frac{f(x)}{1+x^2}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ f

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (F) ៖

$$\text{គេមាន } y = \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ នោះគេទាញ } f(x) = (1+x^2)y$$

គេបាន $f'(x) = 2xy + (1 + x^2)y'$

ហើយ $f''(x) = 2y + 2xy' + 2xy' + (1 + x^2)y'' = 2y + 4xy' + (1 + x^2)y''$

គេបាន $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (1 + x^2)y'' - 2(1 - x)^2 y' + (1 - x)(3 - x)y$ (1)

ដោយ y ជាចម្លើយរបស់ (E) នោះ y, y', y'' ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ពោលគឺ

$$(1 + x^2)y'' - 2(1 - x)^2 y' + (1 - x)(3 - x)y = \frac{2xe^x}{(1 + x^2)^2} \quad (2)$$

តាម(1)&(2) គេទាញបាន $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = \frac{2xe^x}{(1 + x^2)^2}$ (3)

ទំនាក់ទំនង(3) បញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

២. ស្រាយថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (G) ៖

គេមាន $(G): y'' = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$

បើ $f(x) = e^x g(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) នោះ $f(x), f'(x), f''(x)$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (F) ។

គេមាន $f'(x) = [g(x) + g'(x)]e^x$ និង $f''(x) = [g(x) + 2g'(x) + g''(x)]e^x$
យក $f(x), f'(x), f''(x)$ ជួសក្នុងសមីការ (F) គេបាន ៖

$$\begin{aligned} [g(x) + 2g'(x) + g''(x) - 2g(x) - 2g'(x) + g(x)]e^x &= \frac{2xe^x}{(1 + x^2)^2} \\ g''(x)e^x &= \frac{2xe^x}{(1 + x^2)^2} \\ g''(x) &= \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \quad (4) \end{aligned}$$

តំទំនាក់ទំនង(4) បញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g ជាចម្លើយសមីការ (G) ។

៣. កំណត់អនុគមន៍ g និង f រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ៖

$$\text{តាម(4)គេបាន } g'(x) = \int \frac{2xdx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{1+x^2} + C_1$$

$$\text{ហើយ } g(x) = \int \left(-\frac{1}{1+x^2} + C_1\right) dx = -\arctan x + C_1 x + C_2 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $g(x) = -\arctan x + C_1 x + C_2$ ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរពីរ។

$$\text{ដោយ } f(x) = e^x g(x) \text{ នោះ } f(x) = (-\arctan x + C_1 x + C_2) e^x \quad \text{។}$$

$$\text{ហើយចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ } y = \frac{(-\arctan x + C_1 x + C_2) e^x}{1+x^2} \quad \text{។}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៩

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$១. y' - y = x e^x \sin^2 x$$

$$២. y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$១. y' - y = x e^x \sin^2 x$$

$$\text{តាង } y = e^x f(x) \text{ នោះ } y' = e^x f(x) + e^x f'(x)$$

$$\text{សមីការទៅជា } e^x f(x) + e^x f'(x) - e^x f(x) = x e^x \sin^2 x$$

$$e^x f'(x) = x e^x \sin^2 x$$

$$\text{គេទាញ } f(x) = \int x \sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

ដូចនេះ $y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C \right) e^x$ ដែល C : ចំនួនថេរ។

២. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$ តាង $y = e^{-x} g(x)$ នោះ $y' = [g'(x) - g(x)]e^{-x}$ និង $y'' = [g''(x) - 2g'(x) + g(x)]e^{-x}$ ហើយសមីការអាចសរសេរ ៖

$$[g''(x) - 2g'(x) + g(x) + 2g'(x) - 2g(x) + g(x)]e^{-x} = e^{-x} \ln x$$

ឬ $g''(x)e^{-x} = e^{-x} \ln x$ នោះ $g'(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C_1$

ហើយ $g(x) = \int (x \ln x - x + C_1) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2$

ដូចនេះ $y = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2 \right) e^x$ ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ទី៥០

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១. $y' - 2y = xe^{2x} \cot^2 x$

២. $y'' - 2y' + y = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១. $y' - 2y = xe^{2x} \cot^2 x$

តាង $y = e^{2x} f(x)$ នោះ $y' = 2e^{2x} f(x) + e^{2x} f'(x)$ ហើយសមីការទៅជា

$$2e^{2x} f(x) + e^{2x} f'(x) - 2e^{2x} f(x) = xe^{2x} \cot^2 x \quad \text{ឬ} \quad f'(x) = x \cot^2 x$$

គេទាញ $f(x) = \int x \cot^2 x \, dx = -\frac{x^2}{2} - x \cot x + \ln(\sin x) + C$

ដូចនេះ $y = e^{2x} \left[-\frac{x^2}{2} - x \cot x + \ln(\sin x) + C \right]$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

២. $y'' - 2y' + y = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$ តាង $y = g(x)e^x$ នោះ $y' = [g'(x) + g(x)]e^x$ និង

$y'' = [g''(x) + 2g'(x) + g(x)]e^x$ ហើយសមីការអាចសរសេរជា ៖

$$[g''(x) + 2g'(x) + g(x)]e^x - 2[g'(x) + g(x)]e^x + g(x)e^x = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$$

$$[g''(x) + 2g'(x) + g(x) - 2g'(x) - 2g(x) + g(x)]e^x = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$$

$$g''(x) = \frac{x \sin x}{\cos^3 x}$$

គេទាញបាន $g'(x) = \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} \, dx = \frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + C_1$

ហើយ $g(x) = \int \left(\frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + C_1 \right) dx$

$$g(x) = \frac{1}{2} x \tan x + \ln |\cos x| + C_1 x + C_2$$

ដូចនេះ $y = e^x \left(\frac{1}{2} x \tan x + \ln |\cos x| + C_1 x + C_2 \right)$ ដែល C_1, C_2 : ថេរ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៤

លំហាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ

០១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោមនេះ

ក) $y' - 5y = 0$

ខ) $y' + 4y = 0$

គ) $2y' - 3y = 0$

ឃ) $3y' + 4y = 0$

ង) $-y' + y \ln 2 = 0$

០២. ដោះស្រាយសមីការ $2y' - 4y = 0$ ដោយដឹងថា $y'(0) = 4$ ។

០៣. ដោះស្រាយសមីការ $3y' + 9y = 0$ ដោយដឹងថា $y'(0) = 6$ ។

០៤. ដោះស្រាយសមីការ $y' - y \ln 2 = 0$ ដោយដឹងថា $y'(2) = 16$ ។

០៥. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' - 2y = 0$ បើគេដឹងថា $y(0) = 3$

ខ. $2y' + y = 0$ បើគេដឹងថា $y(0) = -4$

គ. $y' - 3y = 6$ បើគេដឹងថា $y(0) = 2$

០៦. ក) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): y' - 4y = 0$

ខ) គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_2): y' - 4y = 2x - \frac{9}{2}$

ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $g(x) = ax + b$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E_2) ។

គ) ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយសមីការ (E_2) លុះត្រាតែ

អនុគមន៍ $h(x) = f(x) - g(x)$ ជាចម្លើយសមីការ (E_1)

រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E_2) ។

០៧. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = 2x^2 + 10x + 12$

ក) កំណត់អនុគមន៍ពហុធានីក្រេទីពីរ $g(x)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយសមីការ (E) លុះត្រាតែ

$y = f(x) - g(x)$ ជាចម្លើយសមីការ $(E'): y' + 2y = 0$ ។

គ) ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចម្លើយសមីការ (E) ។

០៨. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - 4y = (2x - 5)^2$

ក) កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយមួយ
របស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។

ខ) ចូរស្រាយថាបើ $y = g(x) + h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ h ជាចម្លើយសមីការ $(F): y' - 4y = 0$ ។

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

០៩. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' - 4y = -4x^2 + 10x - 6$

ក. កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_p(x) = ax^2 + bx + c$

ជាចម្លើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = y_p(x) + y_h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) នោះអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន

$$(E'): y' - 4y = 0 \quad ។$$

គ.ដោះស្រាយ (E') រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

១០.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\text{ខ. } y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\text{គ. } y'' - 4y' + 13y = 0$$

១១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក. } y'' - 5y' + 6y = 0 \text{ បើគេដឹងថា } y'(0) = 5 \text{ និង } y(0) = 2$$

$$\text{ខ. } y'' - 2y' + 2y = 0 \text{ បើគេដឹងថា } y'(0) = 2 \text{ និង } y(0) = 1$$

$$\text{គ. } y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ បើគេដឹងថា } y'(0) = 7 \text{ និង } y(0) = 2$$

១២.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក. } y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\text{ប. } y'' + y' - 2y = 0$$

$$\text{ខ. } y'' - y' - 2y = 0$$

$$\text{ឆ. } y'' - 4y = 0$$

$$\text{គ. } y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$\text{ជ. } y'' + 4y = 0$$

$$\text{ឃ. } 2y'' + 2y' + y = 0$$

$$\text{ឈ. } y'' + 2y' = 0$$

$$\text{ង. } y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$\text{ញ. } y'' - y' + 0.25y = 0$$

១៣.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\text{ក. } y'' + 3y' + 2y = 4$$

$$\text{ប. } 2y'' - 3y' + y = 8$$

$$\text{ខ. } y'' - 4y = 2x + 3$$

$$\text{ឆ. } y'' - 4y' + 3y = 8x - 4$$

$$\text{គ. } y'' + y = x^2$$

$$\text{ជ. } y'' - 2y' + 2y = x^2 - 2x + 2$$

ឃ. $y'' - 4y' + 4y = (2x - 3)^2$ ឈ. $4y'' - 12y' + 9y = (3x + 2)^2$

ង. $y'' - 9y = \cos x$ ញ. $y'' + y' - 2y = x^3$

១៤. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 3y' + 2y = 0$

ដោយដឹងថា $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ។

១៥. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 2y' + 5y = 0$

បើគេដឹងថា $y(0) = 1$ និង $y'(0) = 5$ ។

១៦. ១) រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'' + 4y = 0$ (E) ។

២) រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) បើគេដឹងថា $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{3}$

និង $g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$ ។

១៧. ក) ដោះស្រាយសមីការ $g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$ (E)

ខ) កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0) = 0$ និង $g'(0) = 1$

១៨. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ខាងក្រោម ៖

ក) $y'' - 3y' + 2y = 0$ ខ) $y'' + 4y' + 3y = 0$

គ) $y'' - 4y' + 4y = 0$ ឃ) $4y'' - 12y' + 9y = 0$

ង) $y'' - 6y' + 13y = 0$ ច) $y'' + 2y' + 10y = 0$

១៩. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

(E) : $y' - 3y' + 2y = 52x^2 - 146x + 4029$

ក) កំណត់ពហុធានីក្រេទីពីរ $P(x)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) លុះ

ត្រាតែ $y = f(x) - P(x)$ ជាចម្លើយសមីការ $(F) : y'' - 3y' + 2y = 0$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

២០. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' + 4y' + 4y = 7 \cos x - \sin x$

ក) កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $g(x) = A \cos x + B \sin x$

ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$y = f(x) - g(x)$ ជាចម្លើយសមីការ $(F) : y'' + 4y' + 4y = 0$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

២១. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E) : y'' - 2y' + 2y = ax^2 + bx + c$

ក) កំណត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យពហុធា $g(x) = x^2 - 2x + 2$

ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$y = f(x) - g(x)$ ជាចម្លើយសមីការ $(F) : y'' - 2y' + 2y = 0$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

២២. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 5y' + 6y = (2x - 3)^2$

ក) កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $g(x) = ax^2 + bx + c$

ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = g(x) + h(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ h ជាចម្លើយសមីការ (F) : $y'' - 5y' + 6y = 0$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

២៣. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 4y' + 3y = 12x$

ក) កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = ax + b$

ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = g(x) + h(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E)

នោះអនុគមន៍ h ជាចម្លើយសមីការ (F) : $y'' - 4y' + 3y = 0$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

២៤. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - y' - 2y = 0$ ដោយដឹងថា

$y(0) = 3$ និង $y'(0) = 0$ ។

២៥. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 2y' + 5y = 0$ ដោយដឹងថា

$y(0) = 1$ និង $y'(0) = 3$ ។

២៦. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 6y' + 9y = 0$ ដោយដឹងថា

$y(0) = 2$ និង $y'(0) = 4$ ។

២៧. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 4y' + 4y = 0$ ដោយដឹងថាក្រាប (c)

តាង $y = f(x)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = 2x + 3$ ត្រង់ $A(0, 3)$ ។

២៨. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y' - 2y = 0$ ដោយដឹងថាក្រាប (c)

តាង $y = f(x)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = 1 - 2x$ ត្រង់ $A(0, 1)$ ។

២៩.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$\text{ក) } y'' + 3y' + 2y = 2x^2 \qquad \text{ខ) } y'' - y = \sin x + \cos x$$

$$\text{គ) } y'' + 4y + 4y = 9e^x \qquad \text{ឃ) } y'' - 2y' + 2y = 4x + 1$$

$$\text{ង) } y'' - 6y' + 5y = 12e^{-x} \qquad \text{ច) } y'' + 4y = 8e^{2x}$$

៣០.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y + (3x + 1)e^x = 0$

ក) កំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $g(x) = (Ax + B)e^x$

ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែ

$$y = f(x) - g(x) \text{ ជាចម្លើយសមីការ } (F): y'' - 4y = 0$$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

៣១.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + y = x^2 - 2x + 4$

ក) កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $y_1 = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយមួយ
របស់សមីការ (E) ។

ខ) បង្ហាញថាបើ $y = y_1 + y_2$ ជាចម្លើយរបស់ (E) នោះអនុគមន៍ y_2
ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y'' + y = 0$ ។

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

៣២.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ ។

ក. រកចម្លើយ y_h នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + 2y' + y = 0$ ។

ខ.កំណត់ A, B, C ដើម្បីឲ្យ $y_p = Ax^2 + Bx + C$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

គ.បង្ហាញថា $y = y_h + y_p$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

៣៣.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(E_1) : -y'' - y' + 6y = 6x^2 - 2x + 4 \quad \text{និង} \quad (E_2) : -y'' - y' + 6y = 0$$

ក.ដោះស្រាយសមីការ (E_2) ។

ខ.រកពហុធា $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) ។

៣៤.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x - 2$

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x) = ax^2 + bx + c$

ជាចម្លើយ មួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = f(x) + P(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E)

បើអនុគមន៍ f ជាចម្លើយសមីការ $(F) : y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៣៥.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : y'' - 4y' + 4y = 4x^2 - 24x + 34$

ក.កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y_p(x) = ax^2 + bx + c$

ជាចម្លើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ.បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = y_p(x) + y_h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់ (E)

នោះអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំណើយរបស់សមីការ $(E') : y'' - 4y' + 4y = 0$

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

៣៦.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_1): $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$ ។

ក.រង្វះស្រាយសមីការ (E_2): $y'' - 5y' + 6y = 0$ ។

ខ.រកពហុធា $p(x) = ax^2 + bx + c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1)

រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) ។

៣៧.គេឲ្យសមីការ $y'' - 4y' + 5y = 0$ (E) ។

ក.រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ (E) ។

ខ.គេដឹងថា $y_p = a \cos x + b \sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ

$y'' - 4y' + 5y = 4 \cos x - 12 \sin x$ (F) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

រកចំនួនពិត a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) ។

៣៨.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 2y' + y = x^2 - 6x + 7$

ក.កំណត់លេខមេគុណ a, b, c នៃពហុធាដឺក្រេទីពីរ $P(x) = ax^2 + bx + c$

ដែលជាចម្លើយមួយរបស់ (E) ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = h(x) + P(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

(E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ h ជាចម្លើយសមីការ (F): $y'' - 2y' + y = 0$ ។

គ.រង្វះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

៣៩.ក.រង្វះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 3y' + 2y = 0$ ។

ខ.រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$y(0) = 1$ និង $y'(1) = 2e^2$ ។

៤០. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + 2y = 2017e^x$

ក) កំណត់ចំនួនពិត A ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = Ae^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ) ដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' - 2y' + 2y = 0$ (តាង $h(x)$ ជាចម្លើយរបស់វា) ។

គ) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = g(x) + h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។
 ឃ) រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាខ្សែកោងតាងចម្លើយរបស់វាប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = 2x + 3$ ត្រង់ចំណុច $A(0,3)$ ។

៤១. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 4y = 6(x-2)e^{2x}$

ក) ចូរស្រាយថាបើ $y = e^{2x}f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ f ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' = 6(x-2)$ ។

ខ) ដោះស្រាយសមីការ f រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

គ) រកអនុគមន៍ g ជាចម្លើយពិសេសរបស់ (E) ដោយដឹងថា $g(3) = g'(3) = 0$ ។

៤២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y' - 6y = 0$ ។

បើ $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ ។

៤៣. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' - 3y = 0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$y(0) = 1$ និង $y'(1) = e$ ។ (e ជាចំនួនពិតដែល $\ln e = 1$)

៤៤.ក.រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+4y=0$ (E) ។

ខ.រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) បើគេដឹងថា ៖

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3} \text{ និង } g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3} \text{ ។}$$

៤៥.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+y=2x^2e^x$

ក.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=(x-1)^2e^x$ ជាចម្លើយ
មួយរបស់សមីការ(E) ។

ខ.រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

៤៦.គេឲ្យសមីការ $y''-4y'+5y=0$ (E) ។

ក.រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ (E) ។

ខ.គេដឹងថា $y_p=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ

$$y''-4y'+5y=4\cos x-12\sin x \text{ (F) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត } x \text{ ។}$$

រកចំនួនពិត a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) ។

៤៧.គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): -y''-y'+6y=6x^2-2x+4$ ។

ក.រង្វះស្រាយសមីការ $(E_2): -y''-y'+6y=0$ ។

ខ.រកពហុធា $p(x)=ax^2+bx+c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) ។

៤៨.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E): $y''-2y'+10y=0$ ។

ក.រង្វះស្រាយសមីការ(E) ។

ខ.រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយពិសេសរបស់ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C)

តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = 4x + 1$ ត្រង់ $A(0,1)$ ។

៤៩.ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 6y'' - 5y' + y = 0$ ។

ខ.រកចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដែល $y(0) = 5$ និង $y'(0) = 2$

៥០.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 4y = 6(x-2)e^{2x}$

ក.ស្រាយថាបើ $y = e^{2x} f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) នោះអនុគមន៍ f

ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ $(F): y'' = 6(x-2)$ ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ f រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

គ.រកអនុគមន៍ g ជាចម្លើយពិសេសរបស់ (E) ដោយដឹងថា $g(3) = g'(3) = 0$ ។

៥១.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + y = 2x^2 e^x$

ក.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = (x-1)^2 e^x$ ជាចម្លើយ

មួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ.រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៥២.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' + 10y = 0$ ។

ក.ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

ខ.រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយពិសេសរបស់ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C)

តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y = 2x + 3$ ត្រង់ $A(0,3)$ ។

៥៣.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 4y'' + y = 3\sin x - 3\cos x$

ក.ដោះស្រាយសមីការ $(F): 4y'' + y = 0$ ។

ខ.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $g(x) = a \cos x + b \sin x$ ជាចម្លើយមួយនៃ (F) ។

គ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y = f(x) + g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

ឃ.រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៥៤.គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 2$

ក) កំណត់អនុគមន៍ពហុធាជីក្រេទីពីរ $g(x)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយសមីការ (E) លុះត្រាតែ

$$y = f(x) - g(x) \text{ ជាចំលើយសមីការ } (E'): y'' - 3y' + 2y = 0 \text{ ។}$$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចម្លើយសមីការ (E) ។

៥៥.គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + y' - 2y = 7 \cos x - \sin x$

ក) កំណត់ចំនួនពិត a និង b អនុគមន៍ $g(x) = a \cos x + b \sin x$

ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយសមីការ (E) លុះត្រាតែ

$$y = f(x) - g(x) \text{ ជាចម្លើយសមីការ } (E'): y'' + y' - 2y = 0 \text{ ។}$$

គ) ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចំលើយសមីការ (E) ។

៥៦.កំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y'' - 4y' + 3y = 0$ បើគេដឹងថាក្រាប (C) តាង f ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់

$(T): y = 2x$ ត្រង់គល់ O ។

៥៧.គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + y = 0$ ។

ក) កំណត់ពហុធានីក្រេទីពីរ g ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

ខ) តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x) = f(x) - g(x)$ ។

បើ h ជាចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y'' - 2y' + y = 0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

គ) ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

៥៨. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' = \frac{3x^2 - 4xy + 5y^2}{2x^2 - 10xy + 21y^2}$

ក. ចូរស្រាយថាបើអនុគមន៍ $y = ux$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) នោះ

អនុគមន៍ u ជាចម្លើយសមីការអថេរផ្តាច់

$$(F): \frac{2 - 10u + 21u^2}{1 - 2u + 5u^2 - 7u^3} du = \frac{3}{x} dx \quad \text{។}$$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់ (E) ។

៥៩. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' = \frac{(1 + y^2)(\cos x - \sin x)}{2y + 2y \sin 2x}$ ។

៦០. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + y' - 2y = (6x + 2)e^x$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $g(x) = x^2 e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' + y' - 2y = 0$ ។

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៦១. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + 2y = (x^2 + 2)e^x$

ក. ចូរស្រាយថា $y_p = x^2 e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' - 2y' + 2y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់

សមីការ (E) ។

៦២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y' + 2y = (7 \cos x + \sin x)e^x$ ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយរបស់សមីការ
កាត់តាមចំណុច $A(0,5)$ ។

៦៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' = \frac{2(x-y)(x+y)}{y(4x-y)}$

៦៤. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3)(y^2+y+1)}{(2y+1)\sqrt{x^2-3x+4}}$ ។

៦៥. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 20x + 27$ ។

ក. កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយ
មួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ. ចូរដោះស្រាយសមីការ $(F): y'' - 4y' + 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់
សមីការ (E) ។

គ. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ដោយដឹងថា
ក្រាប (C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = x + 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0,2)$ ។

៦៦. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y' + 4y = (2x+6)e^x$ ។

ក. កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = (ax+b)e^x$ ជាចម្លើយមួយ
របស់សមីការ (E) ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $y'' + 4y' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់
សមីការ (E) ។

គ.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា
ក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = x - 2$ ត្រង់ចំណុច $M(0, -2)$ ។

៦៧.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' + y = \cos 2x + \sin 2x$ ។

ក.កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$
ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ(E) ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ(F): $y'' + 4y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់
សមីការ (E) ។

គ.ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់សមីការ(E)ដោយដឹងថា
ក្រាប(C) តាង f ប៉ះនឹងបន្ទាត់(d): $y = 2x + 3$ ត្រង់ចំណុច $M(0, 3)$ ។

៦៨.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$\text{ក) } y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{(x+1)^2}$$

$$\text{ខ) } 4y'' + 4y' + y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{(e^x + 1)^2}$$

៦៩.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$ ។

៧០.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y = \sin x + \cos x$

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៥

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយចំនួន

១. រូបប្រភេទសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$

គេមាន $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$ នោះគេបាន $dy = f(x)dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន $\int dy = \int f(x)dx$

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

ដូច្នេះ $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$ នាំឲ្យ $y = \int f(x)dx = F(x) + C$ ។

(ដែល C : ចំនួនថេរណាមួយ) ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$ ។

គេបាន $y' = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$ នោះ $y = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx$

$$y = \int \frac{(x^2+2x+5)'}{(x^2+2x+5)} dx$$

$$y = \ln(x^2+2x+5) + C$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺជាអនុគមន៍ ៖

$$y = \ln(x^2+2x+5) + C \text{ ដែល } C : \text{ចំនួនថេរ។}$$

២. រករូបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$

គេមាន $f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$ នោះ $f(y)dy = g(x)dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន $\int f(y)dy = \int g(x)dx$

ឬ $F(y) = G(x) + C$ ដែល C : ជាចំនួនថេរ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x+1}$ ។

គេបាន $3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x+1}$ នោះ $3y^2dy = \frac{e^x}{e^x+1}dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន $\int 3y^2dy = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$y^3 = \ln(e^x + 1) + C$$

ដូចនេះ $y = \sqrt[3]{\ln(e^x + 1) + C}$ ដែល C : ជាចំនួនថេរ។

៣. រករូបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $y' + ay = f(x)$ ដែល $f(x) \neq 0$

* វិធីសាស្ត្រទី១

គេមាន $y' + ay = f(x)$ (E)

តាង $y = e^{-ax}g(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(1) នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

សមីការ(E) ។ គេមាន $y = e^{-ax}g(x)$ នោះ $y' = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}g'(x)$

សមីការ(E) ទៅជា $-ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}g'(x) + ae^{-ax}g(x) = f(x)$

$$e^{ax}g'(x) = f(x)$$

គេទាញបាន $g(x) = \int e^{-ax} f(x) dx$ ។

ដូចនេះគេបានចម្លើយទូទៅគឺ $y = e^{-ax} \int e^{-ax} f(x) dx$ ។

* វិធីសាស្ត្រទី២

គេមាន $y' + ay = f(x)$ (E)

តាង y_p ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់ (E) នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ

ពេលគឺ $y_p' + ay_p = f(x)$ (E')

ដកសមីការ (E) នឹង (E') អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$(y' - y_p') + a(y - y_p) = 0$ (E'') តាង $y_h = y - y_p$ នោះ $y_h' = y' - y_p'$

សមីការ (E'') ទៅជា $y_h' + ay_h = 0$ នោះគេបាន $y_h = k e^{-ax}$ ដែល k ៖ បើ

តាម $y_h = y - y_p$ គេទាញ $y = y_h + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដូចនេះ $y = y_p + y_h$ ដែល y_p ហៅថាចម្លើយពិសេសនិង y_h ហៅថាចម្លើយ
អូម៉ូហ្សែន ។

* របៀបរកចម្លើយពិសេស y_p ៖

សមីការ (E) : $y' + ay = f(x)$ ដែល $f(x) \neq 0$

☞ បើកន្សោម $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{k=0}^n b_k x^k$

គេត្រូវតាង $y_p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ។

☞ បើកន្សោម $f(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$

គេត្រូវតាង $y_p = C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)$ ។

☞ បើកន្សោម $f(x) = e^{\alpha x} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n b_k x^k$

គេត្រូវតាង $y_p = e^{\alpha x} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ។

☞ បើកន្សោម $f(x) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] e^{\alpha x}$

គេត្រូវតាង $y_p = [C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)] e^{\alpha x}$ ។

៨. រូបប្រភេទសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $ay'' + by' + cy = f(x)$

គេមាន $ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E)$

តាង y_p ជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់ (E) នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ

ពេលគឺ $ay_p'' + by_p' + cy_p = f(x) \quad (E')$

ដកសមីការ (E) នឹង (E') អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$a(y'' - y_p'') + b(y' - y_p') + c(y - y_p) = 0 \quad (E'')$

តាង $y_h = y - y_p$ នោះ $y_h' = y' - y_p'$ និង $y_h'' = y'' - y_p''$

សមីការ (E'') ទៅជា $ay_h'' + by_h' + cy_h = 0$ មានសមីការសម្គាល់

$ar^2 + br + c = 0$ ។

★ករណីទី១

$\Delta > 0$ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា r_1, r_2

ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការកំណត់ដោយ ៖

$y_h = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$ ដែល A, B : ចំនួនថេរ។

★ករណីទី២

$\Delta = 0$ សមីការសម្គាល់មានឫសឌុបជាចំនួនពិត $r_1 = r_2 = r_0$

ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការកំណត់ដោយ ៖

$$y_h = (Ax + B)e^{r_0x} \text{ ដែល } A, B: \text{ ចំនួនថេរ។}$$

☆ករណីទី៣

$\Delta < 0$ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ

$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ ។ ក្នុងករណីនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការកំណត់ដោយ ៖

$$y_h = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x} \text{ ដែល } A, B: \text{ ចំនួនថេរ។}$$

តាម $y_h = y - y_p$ គេទាញ $y = y_h + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(E) ។

ដូចនេះ $y = y_p + y_h$ ដែល y_p ហៅថាចម្លើយពិសេសនិង y_h ហៅថាចម្លើយអូម៉ូហ្សេន ។

ដូចនេះយើងអាចសង្ខេបរបៀបដោះស្រាយដោយខ្លីខាងក្រោម៖

សមីការ(E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$, $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

☞ រកចម្លើយអូម៉ូសែន $ay'' + by' + cy = 0$ តាងដោយ y_h ។

☞ រកចម្លើយពិសេស y_p របស់សមីការ (E)

☞ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y = y_h + y_p$ ។

* របៀបរកចម្លើយពិសេស y_p ៖

សមីការ (E) : $y' + ay = f(x)$ ដែល $f(x) \neq 0$

☞ បើកន្សោម $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{k=0}^n b_kx^k$

គេត្រូវតាង $y_p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ ។

☞ បើកន្សោម $f(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$

គេត្រូវតាង $y_p = C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)$ ។

☞ បើកន្សោម $f(x) = e^{\alpha x} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n b_k x^k$

គេត្រូវតាង $y_p = e^{\alpha x} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ។

☞ បើកន្សោម $f(x) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] e^{\alpha x}$

គេត្រូវតាង $y_p = [C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)] e^{\alpha x}$ ។

៥. រកប្រភេទសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយមានទម្រង់៖

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ដែល f ជាអនុគមន៍ជាប់លើដែនកំណត់សមីការ

យើងអាចបម្លែងវាទៅជាសមីការមានអថេរផ្តាច់ដូចតទៅ៖

ដោយយក $y = x v(x)$ នោះ $y' = v(x) + x v'(x)$

សមីការ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ក្លាយទៅជា $v(x) + x v'(x) = f(v(x))$

ឬ $x \frac{dv(x)}{dx} = f[v(x)] - v(x)$ ឬ $\frac{1}{f[v(x)] - v(x)} dv(x) = \frac{1}{x} dx$

គេទាញ $\int \frac{1}{f[v(x)] - v(x)} dv(x) = \int \frac{1}{x} dx$ ។

ឧទាហរណ៍១

ដោះស្រាយសមីការ $(x^2 + 2xy + 3y^2)dx - (x^2 + 2xy)dy = 0$

គេបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy + 3y^2}{x^2 + 2xy}$ ដោយតាង $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + u'x$

គេបាន $u + u'x = \frac{x^2 + 2x^2u + 3u^2x^2}{x^2 + 2x^2u} = \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + 2u}$ ដោយ $u' = \frac{du}{dx}$

គេបាន $u + x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + 2u}$ ឬ $x \frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + 2u} - u = \frac{1 + u + u^2}{1 + 2u}$

នាំឱ្យ $\frac{2u + 1}{u^2 + u + 1} du = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{2u + 1}{u^2 + u + 1} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |u^2 + u + 1| = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx|$$

គេទាញ $u^2 + u + 1 = Cx$ តែ $y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$

គេបាន $\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1 = Cx$ នាំឱ្យ $(C - 1)x^2 - xy - y^2 = 0, C \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xyy' = x^2 - xy + y^2$ ។

ចម្លើយសមីការគឺ $\frac{y}{x} + \ln |1 - \frac{y}{x}| = -\ln |cx|, c \in \mathbb{R}$ ។

៦. រៀបរៀងដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូហ្សែនទី១ $y' = f(x, y)$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' = f(x, y)$ ដែល $f(x, y)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែន ហៅថាសមីការអូម៉ូសែន ។

$f(x, y)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូសែនលុះត្រាតែ $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ ។

ដំណោះស្រាយសមីការ $y' = f(x, y)$

. គេត្រូវតាង $y = ux$ នោះ $y' = \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

.សមីការអាចសរសេរជា $u + x \frac{du}{dx} = f(x, ux)$ ឬ $x \frac{du}{u} = f(x, ux) - u$

.ដោះសមីការថ្មីនេះរួចជំនួស $u = \frac{y}{x}$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

តាង $y = ux$ នោះ $y' = \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

សមីការអាចសរសេរ $u + x \frac{du}{dx} = \frac{x^2 + x^2 u^2}{ux^2} = \frac{1 + u^2}{u}$.

ឬ $x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2}{u} - u = \frac{1}{u}$ គេទាញ $u du = \frac{dx}{x}$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ $\int u \cdot du = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C$ ដោយ $u = \frac{y}{x}$ នោះ $y^2 = 2x^2(\ln|x| + C)$ ។

៧.របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូហ្សែនទម្រង់ទម្រង់ $y' = \frac{\alpha x + \beta y}{px + qy}$

ដោះស្រាយសមីការ $y' = \frac{\alpha x + \beta y}{px + qy}$ ដែល $\alpha q - \beta p \neq 0$ ។

គេត្រូវតាង $y = ux$ នោះ $y' = \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

សមីការអាចសរសេរ $u + x \frac{du}{dx} = \frac{\alpha x + \beta ux}{px + qux} = \frac{\alpha + \beta u}{p + qu}$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{\alpha + (\beta - p)u - qu^2}{p + qu}$$

$$\frac{p + qu}{\alpha + (\beta - p)u - qu^2} \cdot du = \frac{1}{x} \cdot dx$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ $\int \frac{p + qu}{\alpha + (\beta - p)u - qu^2} \cdot du = \int \frac{dx}{x}$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' = \frac{2x - y}{x - y}$

តាង $y = ux$ នោះ $y' = \frac{du}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$

សមីការអាចសរសេរ $u + x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2x - ux}{x - ux} = \frac{2 - u}{1 - u}$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{2 - u}{1 - u} - u = \frac{2 - 2u + u^2}{1 - u}$$

គេទាញ $\frac{u-1}{u^2-2u+2} \cdot du = -\frac{1}{x} \cdot dx$ ។

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន $\int \frac{u-1}{u^2-2u+2} \cdot du = -\int \frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 - 2u + 2) = -\ln|x| + C_1 \quad \text{ឬ} \quad \ln(u^2 - 2u + 2) = \ln \frac{C}{x^2}$$

គេទាញ $u^2 - 2u + 2 = \frac{C}{x^2}$ ដោយ $u = \frac{y}{x}$

គេបាន $\frac{y^2}{x^2} - \frac{2y}{x} + 2 = \frac{C}{x^2}$ នាំឲ្យ $x^2 - 2xy + 2y^2 = C$ ដែល C បើរ

៨. របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូសែនទម្រង់ $y' = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{p x + q y + r}$

ដោះស្រាយសមីការ $y' = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{p x + q y + r}$

.ករណីទី១ $\alpha q - \beta p = 0$

ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវតាង $z = p x + q y + r$ ។

.ករណីទី២ $\alpha q - \beta p \neq 0$

-ត្រូវរកពីរចំនួនពិត λ និង μ ដែល $\begin{cases} \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma = 0 \\ p\lambda + q\mu + r = 0 \end{cases}$

-តាង $y = Y + \mu$ និង $x = X + \lambda$ នោះសមីការអាចសរសេរ

$$(Y + \mu)' = \frac{\alpha(X + \lambda) + \beta(Y + \mu) + \gamma}{p(X + \lambda) + q(Y + \mu) + r}$$

$$Y' = \frac{\alpha X + \beta Y + (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma)}{pX + qY + (p\lambda + q\mu + r)}$$

$$Y' = \frac{\alpha X + \beta Y}{pX + qY} \text{ ដោះស្រាយដូចសមីការខាងលើ ។}$$

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $y' = \frac{2x + 4y + 3}{x + 2y + 1}$

តាង $z = x + 2y + 1$ គេបាន $z' = 1 + 2y'$ ឬ $y' = \frac{z' - 1}{2}$

សមីការអាចសរសេរ $\frac{z' - 1}{2} = \frac{2z + 1}{z}$ ឬ $z' = \frac{4z + 2}{z} + 1 = \frac{5z + 2}{z}$

ដោយ $z' = \frac{dz}{dx}$ គេបាន $\frac{dz}{dx} = \frac{5z + 2}{z}$ នាំឲ្យ $\frac{z}{5z + 2} \cdot dz = dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ $\int \frac{z}{5z + 2} \cdot dz = \int dx$

ដោយ $\frac{z}{5z + 2} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{5z + 2} \right)$

គេបាន $\frac{1}{5} \int \left(1 - \frac{2}{5z + 2} \right) \cdot dz = \int dx$

$$\frac{1}{5} \left(z - \frac{2}{5} \ln |5z + 2| \right) = \ln |x| + C_1$$

$$5z - 2 \ln |5z + 2| = 25 \ln |x| + C \text{ ដែល } C = 25C_1$$

ដោយ $z = x + 2y + 1$ នោះ $5(x + 2y + 1) - 2 \ln |5x + 10y + 7| = 25 \ln |x| + C$

ឧទាហរណ៍២

ដោះស្រាយសមីការ $y' = \frac{5x - 2y - 8}{2x - y - 3}$ (*)

រកពីរចំនួនពិត λ និង μ ដែល $\begin{cases} 5\lambda - 2\mu - 8 = 0 \\ 2\lambda - \mu - 3 = 0 \end{cases}$ គេទាញ $\lambda = 2, \mu = 1$

តាង $y = Y + \mu = Y + 1$ និង $x = X + \lambda = X + 2$

សមីការ (*) អាចសរសេរ $Y' = \frac{5(X+2) - 2(Y+1) - 8}{2(X+2) - (Y-1) - 3} = \frac{5X - 2Y}{2X - Y} \quad (**)$

តាង $Y = uX$ នោះ $Y' = \frac{dY}{dX} = u + X \cdot \frac{du}{dX}$

សមីការ (**) អាចសរសេរ៖

$$u + X \cdot \frac{du}{dX} = \frac{5X - 2uX}{2X - uX} = \frac{5 - 2u}{2 - u}$$

$$X \cdot \frac{du}{dX} = \frac{5 - 2u}{2 - u} - u = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}$$

$$\frac{u - 2}{u^2 - 4u + 5} \cdot du = -\frac{dX}{X}$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន ៖

$$\int \frac{u - 2}{u^2 - 4u + 5} \cdot du = -\int \frac{dX}{X}$$

$$\frac{1}{2} \ln |u^2 - 4u + 5| = -\ln |X| + C_1$$

$$\ln |u^2 - 4u + 5| = -2\ln |X| + 2C_1$$

$$\ln |u^2 - 4u + 5| = \ln \left| \frac{C}{X^2} \right|, \quad 2C_1 = \ln |C|$$

គេទាញ $u^2 - 4u + 5 = \frac{C}{X^2}$ ដោយ $u = \frac{Y}{X} = \frac{y-1}{x-2}$ និង $X = x - 2$

គេបាន $\frac{(y-1)^2 - 4(x-2)(y-1) + 5(x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{C}{(x-2)^2}$

ដូចនេះ $5(x-2)^2 - 4(x-2)(y-1) + (y-1)^2 = C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

៩. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$

- បើ $\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវតាង $U = ax + by$ ។

-បើ $\det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវតាង $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$

សមីការអាចសរសេរ $Y' = f\left(\frac{a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c}{a'(X + x_0) + b'(Y + y_0) + c'}\right)$
 ឬ $Y' = f\left(\frac{aX + bY + (ax_0 + by_0 + c)}{a'X + b'Y + (a'x_0 + b'y_0 + c')}\right)$

បើ $\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ a'x_0 + b'y_0 + c' = 0 \end{cases}$ នោះគេអាចរកឃើញតម្លៃ x_0 និង y_0

ក្នុងករណីនេះសមីការក្លាយជា $Y' = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$

ដោយតាង $Y = U.X \Rightarrow Y' = U + U'.X$ នោះសមីការអាចសរសេរ ៖

$U + U'.X = f\left(\frac{aX + bU.X}{a'X + b'U.X}\right) = f\left(\frac{a + bU}{a' + b'U}\right)$ ដោយ $U' = \frac{dU}{dX}$

គេបាន $U + X \cdot \frac{dU}{dX} = f\left(\frac{a + bU}{a' + b'U}\right)$ ឬ $\frac{dU}{f\left(\frac{a + bU}{a' + b'U}\right) - U} = \frac{dX}{X}$ ។

១០. របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលស្តារលេខនៃអ៊ីលីប៊ែរជាប់នីមួយ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលស្តារលេខនៃអ៊ីលីប៊ែរជាប់មួយជាសមីការដែលមានទម្រង់

ទូទៅជា $u(x)y' + v(x)y = w(x)$ (i) ដែល $u(x) \neq 0$ ។

គេអាចបម្លែងសមីការនេះដោយចែកអង្គសងខាងនិង $u(x) \neq 0$ គេបាន

$y' + \frac{v(x)}{u(x)}y = \frac{w(x)}{u(x)}$ ហើយដោយតាង $p(x) = \frac{v(x)}{u(x)}$ និង $q(x) = \frac{w(x)}{u(x)}$

សមីការក្លាយទៅជា $y' + p(x)y = q(x)$ (ii) ។

ជាបន្តយើងនិងបង្ហាញពីរបៀបដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

លំដាប់ទីមួយមានទម្រង់ $y' + p(x)y = q(x)$ (ii) ។

*តាមវិធីកត្តាអាំងតេក្រាល

(The method of integrating factors)

-គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(ii) នឹង $e^{P(x)}$ ដែល $P(x) = \int p(x)dx$

យើងបាន $y'e^{P(x)} + p(x)e^{P(x)}y = q(x)e^{P(x)}$

សមមូល $\frac{d}{dx}[e^{P(x)}y] = q(x)e^{P(x)}$ ($P(x)$ ហៅថាកត្តាអាំងតេក្រាល)

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេទទួលបាន ៖

$$e^{P(x)}y = \int q(x)e^{P(x)}dx + C$$

នោះ $y = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx + Ce^{-P(x)}$ ដែល $C \in \mathbb{R}$ ។

វិធានដោះស្រាយ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $y' + p(x).y = q(x)$ គេត្រូវ ៖

- ☞ គុណអង្គទាំងពីរនឹងកត្តាអាំងតេក្រាល $u = e^{\int P(x).dx}$
- ☞ ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ ។
- ☞ ដោះស្រាយរកអនុគមន៍ y ។

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $y' + 2xy = 3x^2e^{x^3-x^2}$

-រកកត្តាអាំងតេក្រាល $e^{\int 2x.dx} = e^{x^2}$

-គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង e^{x^2} គេបាន ៖

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = 3x^2e^{x^3} \text{ ឬ } (ye^{x^2})' = 3x^2e^{x^3}$$

$$\text{គេទាញបាន } ye^{x^2} = \int 3x^2e^{x^3}.dx = e^{x^3} + C$$

ដូចនេះ $y = e^{x^3-x^2} + C.e^{-x^2}$ ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $xy' + 2y = 4x^2 + 9x$

$$\text{សមីការអាចសរសេរ } y' + \frac{2}{x}y = 4x + 9 \quad (*)$$

$$\text{-រកកត្តាអាំងតេក្រាល } e^{\int \frac{2}{x}.dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

-គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(*)នឹង x^2 គេបាន ៖

$$x^2y' + 2xy = 4x^3 + 9x^2 \text{ ឬ } (x^2y)' = 4x^3 + 9x^2$$

$$\text{គេទាញបាន } x^2y = \int (4x^3 + 9x^2).dx = x^4 + 3x^3 + C$$

ដូចនេះ $y = x^2 + 3x + \frac{C}{x^2}$ ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយសមីការ $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^4}$

$$\text{-រកកត្តាអាំងតេក្រាល } e^{\int \frac{2x}{1+x^2}.dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$$

-គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $1+x^2$ គេបាន ៖

$$(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1+x^2}{1+x^4} \text{ ឬ } ((1+x^2)y)' = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

$$\text{គេទាញបាន } (1+x^2)y = \int \frac{1+x^2}{1+x^4}.dx$$

$$\text{ដោយ } \int \frac{1+x^2}{1+x^4}.dx = \int \frac{(1+\frac{1}{x^2}).dx}{(x-\frac{1}{x})^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\text{ដូចនេះ } y = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) + \frac{C}{1+x^2}$$

ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

*តាមវិធីសាស្ត្របម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

(The method of variation of constants)

ដើម្បីកំណត់ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E): $y' + p(x)y = q(x)$

-ជាដំបូងយើងដោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន

$$y' + p(x)y = 0 \text{ សមមូល } \frac{dy}{dx} = -p(x)y \text{ ឬ } \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលើសមីការចុងក្រោយគេបាន ៖

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \text{ ឬ } \ln y = -\int p(x)dx + \ln |C|$$

គេទាញ $y = C e^{-\int p(x)dx}$ ដែល $C \neq 0$ ។

-ឥឡូវនេះយើងយក $C = C(x)$ នោះ $y = C(x) e^{-\int p(x)dx}$

ធ្វើដេរីវេគេបាន $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$

$$\text{ឬ } y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)y \text{ ឬ } y' + p(x)y = C'(x)e^{-\int p(x)dx}$$

ដោយ $y' + p(x)y = q(x)$ នោះគេទាញ $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$

$$\text{នោះ } C(x) = \int \left(q(x)e^{-\int p(x)dx} \right) dx + C$$

$$\text{ដូចនេះ } y = \left[\int \left(q(x)e^{-\int p(x)dx} \right) dx + C \right] e^{-\int p(x)dx} \text{ ជាចម្លើយសមីការ}$$

បើគេយក $P(x) = \int p(x)dx$ គេបានចម្លើយទម្រង់៖

$$y = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx + Ce^{-P(x)} \quad \text{ដែល } C \in \mathbb{R} \quad ។$$

ឧទាហរណ៍៤ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' + 2xy = 4(x^3 + 1)e^{-x^2}$ ។

គេមាន $p(x) = 2x$ និង $q(x) = 4(x^3 + 1)e^{-x^2}$

តាមរូបមន្ត $y = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}dx + Ce^{-P(x)}$ ដែល $C \in \mathbb{R}$

$$\text{ដោយ } P(x) = \int p(x)dx = \int 2xdx = x^2$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } y &= e^{-x^2} \int \left[4(x^3 + 1)e^{-x^2} \right] e^{x^2} dx + Ce^{-x^2} \\ &= e^{-x^2} \int (4x^3 + 4)dx + Ce^{-x^2} \\ &= (x^4 + 4x)e^{-x^2} + Ce^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } y = (x^4 + 4x + C)e^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \quad ។$$

១១. របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមិនលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីមួយទម្រង់

$$\frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x) \quad (*)$$

ដែល $f(y)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេនៃ y ហើយ $P(x)$ & $Q(x)$ ជាអនុគមន៍

ជាប់នៃ x លើដែនកំណត់ $D \subseteq \mathbb{R}$ ។

$$\text{បើគេតាង } v(x) = f[y(x)] \text{ នោះ } \frac{dv}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{dx} \text{ នោះសមីការ } (*)$$

អាចសរសេរជា $\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទី១

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{dy}{dx} + 1 = 4e^{-y} \sin x$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការដែលឲ្យសមមូល $e^y \frac{dy}{dx} + e^y = 4 \sin x$

យក $v(x) = e^y$ នោះ $\frac{dv}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$

សមីការទៅជា $\frac{dv}{dx} + v = 4 \sin x$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $v(x) = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y(x) = \ln v(x) = \ln [2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}]$
ដែល $c \in \mathbb{R}$ ។

១២.សមីការប៊ែរណូលី (The Bernoulli equation)

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានទម្រង់ $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)y^n$ (i)

ដែល $n \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ ហើយ $f(x)$ & $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើដែន D ហៅថា
សមីការប៊ែរណូលី ។

ការបម្លែងសមីការ $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)y^n$ (i)

-បើ $y \neq 0$ នោះគេចែកអង្គសងខាងនៃសមីការ(i) នឹង y^n គេបាន៖

$\frac{y'}{y^n} = f(x)\frac{y}{y^n} + g(x)$ ឬ $y' y^{-n} = f(x)y^{1-n} + g(x)$ (ii)

យក $v(x) = y^{1-n}(x)$ នោះ $\frac{dv}{dx} = v' = (1-n)y' y^{-n}$ ឬ $y' y^{-n} = \frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx}$

សមីការ(ii) អាចសរសេរជា $\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} = f(x)v + g(x)$

ឬ $v' - (1-n)f(x)v = (1-n)g(x)$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១។

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $y' + xy = x^3 y^3$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $-2y^{-3}$ គេបាន $-2y' y^{-3} - 2xy^{-2} = -2x^3$

តាង $z = y^{-2}$ នោះ $z' = -2y' y^{-3}$

គេបាន $z' - 2xz = -2x^3$ (*)

-រកកត្តាអាំងតេក្រាល $e^{\int -2x \cdot dx} = e^{-x^2}$

-គុណអង្គទាំងពីរនៃ (*) នឹង e^{-x^2} គេបាន

$$z' e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} z = -2x^3 e^{-x^2}$$

ឬ $(ze^{-x^2})' = -2x^3 e^{-x^2}$ នាំឲ្យ $ze^{-x^2} = -\int 2x^3 e^{-x^2} \cdot dx$

យក $I = -\int 2x^3 e^{-x^2} \cdot dx$ តាង $t = -x^2$ នោះ $dt = -2xdx$

គេបាន $I = \int te^t \cdot dt$ តាង $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$

$$I = uv - \int v du = te^t - \int e^t dt = (t-1)e^t + C \text{ ដោយ } t = -x^2$$

ហេតុនេះ $I = -(x^2 + 1)e^{-x^2} + C$

គេបាន $ze^{-x^2} = -(x^2 + 1)e^{-x^2} + C$ នោះ $z = -x^2 - 1 + C \cdot e^{x^2}$

ដោយ $z = y^{-2}$ នាំឲ្យ $y = \pm \frac{1}{\sqrt{z}} = \pm \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 1 + C \cdot e^{x^2}}}$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $y' + y = xy^3$ ។

ចម្លើយ $y = -\left(x + \frac{1}{2} + ce^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}, c \in \mathbb{R}$ ។

១៣. សមីការរីកកាទី (The Riccati equation)

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានទម្រង់ទូទៅជា៖

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \quad (i) \quad \text{ហៅថា Riccati equation ។}$$

ដែល f, g, h ជាអនុគមន៍ជាប់នៅលើដែនកំណត់ $D \subseteq \mathbb{R}$ នៃសមីការ។

លក្ខណៈសម្គាល់ដែលសមីការរីកកាទីក្លាយទៅជាសមីការឌីផេរ៉ង់លីនេអ៊ែរ

លំដាប់ទី១ ប្រសិនបើគេស្គាល់ចម្លើយមួយរបស់វា។

ដោយឡែកបើយើងសន្មតថា $\phi(x)$ ជាចម្លើយមួយរបស់វាហើយយក

$$\text{អនុគមន៍ } z = z(x) \text{ ដែល } y(x) = \phi(x) + z(x) \text{ និង } \frac{dy}{dx} = \frac{\phi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

ដោយ $\phi(x)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការនោះគេបាន៖

$$\frac{d\phi}{dx} = f(x)\phi^2 + g(x)\phi + h(x) \quad \text{ដោយ } \frac{dy}{dx} = \frac{\phi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

$$\text{គេទាញ } \frac{dy}{dx} = f(x)\phi^2 + g(x)\phi + h(x) + \frac{dz}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

$$\text{គេបាន } \frac{dz}{dx} = [y^2 - \phi^2]f(x) + [y - \phi]g(x)$$

$$\text{ដោយ } y = \phi + z \text{ នោះ } z = y - \phi$$

$$\text{ហើយ } y^2 - \phi^2 = (y - \phi)(y + \phi) = z(z + 2\phi)$$

$$\text{គេបាន } \frac{dz}{dx} = z(z + 2\phi)f(x) + zg(x)$$

ឬ $\frac{dz}{dx} = [2\phi f(x) + g(x)]z + f(x)z^2$ ជាសមីការប៊ែនូលី ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ $y' = -y^2 + (2x + \frac{1}{x})y - x^2$ បើ $y(1) = 2$

ដំណោះស្រាយ

$$y' = -y^2 + (2x + \frac{1}{x})y - x^2 \quad (1)$$

យើងសង្កេតឃើញថាអនុគមន៍ ϕ កំណត់ដោយ $\phi(x) = x$ ជាចម្លើយមួយ

$$\text{របស់សមីការ(1) ព្រោះ } \phi' = -\phi^2 + (2x + \frac{1}{x})\phi - x^2 \quad (2)$$

យើងយក $y = \phi(x) + z(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (1)

$$\text{គេបាន } z = y - \phi \text{ នោះ } z' = y' - \phi' \quad ។$$

$$\text{យក(1) - (2) គេបាន } y' - \phi' = -(y^2 - \phi^2) + (2x + \frac{1}{x})(y - \phi)$$

$$\text{ឬ } z' = -(z^2 + 2z\phi) + (2x + \frac{1}{x})z = (2x + \frac{1}{x} - 2\phi)z - z^2 \text{ ដោយ } \phi = x$$

$$\text{នោះ } z' = \frac{1}{x}z - z^2 \quad (3)$$

$$\text{ចែកអង្គសងខាងសមីការ(3) នឹង } z^2 \text{ គេបាន } z'z^{-2} - \frac{1}{x}z^{-1} = -1 \quad (4)$$

តាង $v = z^{-1}$ នោះ $v' = -z'z^{-2}$ ហើយសមីការ(4) ទៅជា៖

$$-v' - \frac{1}{x}v = -1 \quad \text{ឬ } xv' + v = x \quad \text{ឬ } (xv)' = x \text{ នោះ } xv = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\text{គេទាញ } v = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R} \quad \text{ដោយ } v = z^{-1} \text{ នោះ } z = \frac{1}{v} = \frac{2x}{x^2 + 2C}$$

$$\text{ហើយ } z = y - \phi \text{ នោះ } y = z + \phi = \frac{2x}{x^2 + 2C} + x = \frac{x(x^2 + 2 + 2C)}{x^2 + 2C}$$

$$\text{ចំពោះ } x=1 \text{ នោះ } y(1) = \frac{3+2C}{1+2C} = 2 \text{ គេទាញ } C = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះចម្លើយសមីការគឺ } y = \frac{x(x^2 + 3)}{x^2 + 1} \text{ ដែល } x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ។}$$

១៨. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប និង ហ្វាក់ទ័រអាំងតេក្រាល

ក. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

$$\text{ឧបមាថាមានសមីការ } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

$$\text{បើគេមាន } \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

នោះសមីការ(1)អាចសរសេរក្រោមទម្រង់ ៖

$$dU(x, y) = 0 \text{ ដែលគេហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប ។}$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (1) គឺជាអនុគមន៍ } U(x, y) = C, C \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

ខ. ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

$$\text{សមីការមានទម្រង់ } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$\text{ដែល } P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 \text{ \& } Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\text{យើងមាន } \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \text{ និង } \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy \text{ នោះ } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$$

នោះសមីការអាចសរសេរជា $dU(x, y) = 0$ (សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប)

$$\text{នាំឲ្យ } U(x, y) = C, C \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

$$\text{ដោយគេមាន } dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \text{ នោះគេទាញបាន៖}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \quad (1) \quad \text{និង} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \quad (2)$$

តាម(1)គេទាញបាន $\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = \int (3x^2 + 6xy^2) dx + C(y)$

ឬ $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + C(y)$ នោះ $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + C'(y) \quad (3)$

តាម(2)និង(3)គេទាញ $6x^2y + C'(y) = 6x^2y + 4y^3$

គេបាន $C(y) = \int 4y^3 dy = y^4 + k, k \in \mathbb{R}$

ហេតុនេះ $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + k$ ដោយ $U(x, y) = C, C \in \mathbb{R}$

គេបាន $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + k = C$ យក $\lambda = C - k$

ដូចនេះគេបានចម្លើយសមីការ $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = \lambda$ (ទម្រង់អាំព្រីស៊ីត)

ខ. ហ្វាក់ទ័រអាំងតេក្រាល

ឧបមាថាមានសមីការ $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$

បើគេមាន $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ នោះគេនឹងអាចរកអនុគមន៍ $\mu = \mu(x, y)$

មួយដែលកំនត់ឱ្យ $\mu(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = dU$

គេថា $\mu = \mu(x, y)$ ជាហ្វាក់ទ័រអាំងតេក្រាល ដែលកំនត់ឱ្យ

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)P(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)Q(x, y)] \quad \forall$$

ចំពោះអនុគមន៍ $\mu = \mu(x, y)$ គេអាចរកតាមពីរករណី ៖

1. $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) = F(x)$ នោះ $\mu = \mu(x)$

2. $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) = G(y)$ នោះ $\mu = \mu(y)$

១៥. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{px^2 + qxy + ry^2}$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការទម្រង់នេះគេត្រូវ៖

-តាង $y = ux$ នោះ $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$

សមីការអាចបម្លែងទៅជា $x \frac{du}{dx} + u = \frac{ax^2 + bux^2 + cu^2x^2}{px^2 + qux^2 + ru^2x^2}$

ឬ $x \frac{du}{dx} = \frac{a + bu + cu^2}{p + qu + ru^2} - u = \frac{a + (b-p)u + (c-q)u^2 - ru^3}{p + qu + ru^2}$

គេទាញ $\frac{p + qu + ru^2}{a + (b-p)u + (c-q)u^2 - ru^3} du = \frac{1}{x} dx$

-ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន ៖

$$\int \frac{p + qu + ru^2}{a + (b-p)u + (c-q)u^2 - ru^3} du = \int \frac{1}{x} dx = \ln |cx|, c \in \mathbb{R}^* \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^2 - 5xy + y^2}{7x^2 - 5xy + y^2} \text{ ។}$$

-តាង $y = ux$ នោះ $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$

សមីការអាចបម្លែងទៅជា $x \frac{du}{dx} + u = \frac{8x^2 - 5x^2u + x^2u^2}{7x^2 - 5x^2u + x^2u^2}$

ឬ $x \frac{du}{dx} = \frac{8 - 5u + u^2}{7 - 5u + u^2} - u = \frac{8 - 12u + 6u^2 - u^3}{7 - 5u + u^2}$

ឬ $\frac{7 - 5u + u^2}{8 - 12u + 6u^2 - u^3} du = \frac{1}{x} dx$

ឬ $\frac{7 - 5u + u^2}{(2 - u)^3} du = \frac{1}{x} dx$

$$\text{គេបាន } \int \frac{7-5u+u^2}{(2-u)^3} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{តាង } z = 2-u \text{ នោះ } u = 2-z \text{ និង } du = -dz$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{7-5(2-z)+(2-z)^2}{z^3} (-dz) = \ln |cx| \quad \text{ដែល } c \in \mathbb{R}^*$$

$$-\int \frac{7-10+5z+4-4z+z^2}{z^3} dz = \ln |cx|$$

$$-\int \frac{z^2+z+1}{z^3} dz = \ln |cx|$$

$$-\int \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + z^{-3} \right) dz = \ln |cx|$$

$$\text{ឬ } -\left(\ln |z| - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} \right) = \ln |cx| \text{ ដោយ } z = 2-u = 2-\frac{y}{x} \text{ ព្រោះ } y = ux$$

$$\text{គេបាន } -\ln \left| 2-\frac{y}{x} \right| - \frac{x}{2x-y} - \frac{x^2}{2(2x-y)^2} = \ln |cx| \quad \text{ដែល } c \in \mathbb{R}^* \text{ ។}$$

១៦. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ ៖

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sum_{k=0}^n (a_k x^{n-k} y^k)}{\sum_{k=0}^n (b_k x^{n-k} y^k)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \dots + b_n y^n}$$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការទម្រង់នេះគេត្រូវ៖

$$\text{-តាង } y = ux \text{ នោះ } \frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$$

$$\text{សមីការអាចបម្លែងទៅជា } u + x \frac{du}{dx} = \frac{\sum_{k=0}^n [a_k x^{n-k} (ux)^k]}{\sum_{k=0}^n [b_k x^{n-k} (ux)^k]} = \frac{\sum_{k=0}^n (a_k u^k)}{\sum_{k=0}^n (b_k u^k)}$$

គេទាញ
$$x \frac{du}{dx} = \frac{\sum_{k=0}^n (a_k u^k) - u \sum_{k=0}^n (b_k u^k)}{\sum_{k=0}^n (b_k u^k)}$$

ឬ
$$\frac{\sum_{k=0}^n (b_k u^k)}{\sum_{k=0}^n (a_k u^k) - u \sum_{k=0}^n (b_k u^k)} du = \frac{1}{x} dx$$

គេបាន
$$\int \frac{\sum_{k=0}^n (b_k u^k)}{\sum_{k=0}^n (a_k u^k) - u \sum_{k=0}^n (b_k u^k)} du = \int \frac{1}{x} dx = \ln |cx|, c \in \mathbb{R}^* \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy - y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \quad \text{។}$$

តាង $y = ux$ នោះ $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$

សមីការអាចបម្លែងទៅជា $u + x \frac{du}{dx} = \frac{3x^2 - 2x^2u - x^2u^2}{x^2 + 2x^2u + 3x^2u^2}$

ឬ $x \frac{du}{dx} = \frac{3 - 2u - u^2}{1 + 2u + 3u^2} - u = \frac{3 - 3u - 3u^2 - 3u^3}{1 + 2u + 3u^2} = -\frac{3(u^3 + u^2 + u - 1)}{3u^2 + 2u + 1}$

គេបាន $-\frac{3u^2 + 2u + 1}{3(u^3 + u^2 + u - 1)} du = \frac{1}{x} dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន ៖

$$-\int \frac{3u^2 + 2u + 1}{3(u^3 + u^2 + u - 1)} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{1}{3} \int \frac{d(u^3 + u^2 + u - 1)}{u^3 + u^2 + u - 1} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{1}{3} \ln |u^3 + u^2 + u - 1| = \ln |cx|$$

$$\text{គេទាញ } \ln |u^3 + u^2 + u - 1| = \ln \left| \frac{1}{(cx)^3} \right|$$

$$\text{ឬ } u^3 + u^2 + u - 1 = \frac{k}{x^3} \quad \text{ដែល } k = \pm \frac{1}{c^3}$$

$$\text{ដោយ } y = ux \text{ នោះ } u = \frac{y}{x}$$

$$\text{គេបាន } \frac{y^3}{x^3} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1 = \frac{k}{x^3} \quad \text{ឬ } y^3 + y^2x + yx^2 - x^3 = k, k \in \mathbb{R} \quad ។$$

១៧.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរមានមេគុណមិនថេរ ៖

ក)និយមន័យ១

គេឲ្យសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរ $(E): y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$

ដែល $g(x), h(x) \& f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $D \subseteq \mathbb{R}$ ។

-បើ $f(x)$ មិនមែនជាអនុគមន៍សូន្យ នោះ (E) ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរ។

-បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សូន្យ នោះ (E) ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរ។

ខ)និយមន័យ២

អនុគមន៍ទាំងឡាយ $y_p(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយនឹងសមីការ (E) នៅលើដែនកំណត់ D ហើយដែលគ្មានជាប់ចំនួនថេរពីរនៅក្នុងនោះ ហៅថាចម្លើយដោយឡែក (Particular) នៃសមីការ (E) លើដែន D ។

គ)សំណើ១

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E): $y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$ គឺជាអនុគមន៍

ដែលមានទម្រង់ $y(x, c_1, c_2) = \phi_H(x, c_1, c_2) + y_p(x)$ ។

ដែល $\phi_H(x, c_1, c_2)$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន៖

$y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$ ហើយ $y_p(x)$ ជាចម្លើយដោយឡែកនៃសមីការ

មិនអូម៉ូសែន(E): $y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$ ។

ឃ)សំណើ២

ចម្លើយដោយឡែក $y_p(x)$ នៃសមីការមិនអូម៉ូសែន៖

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_1(x) + f_2(x) \text{ ដែល } g(x), h(x), f_1(x), f_2(x)$$

ជាអនុគមន៍ជាប់លើដែន D គឺឲ្យដោយផលបូក $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$

ដែល $y_1(x)$ ជាចម្លើយដោយឡែកនៃ $y'' + g(x)y' + h(x)y = f_1(x)$ និង

$y_2(x)$ ជាចម្លើយដោយឡែកនៃ $y'' + g(x)y' + h(x)y = f_2(x)$ ។

ង)ចម្លើយដោយឡែក (វិធីសាស្ត្របម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ)

នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងបង្ហាញអំពីវិធីសាស្ត្រទូទៅដើម្បីកំណត់ចម្លើយ

ដោយឡែកនិងការទាញរករូបមន្តចម្លើយអាំងតេក្រាលចំពោះចម្លើយ

ដោយឡែកនៃសមីការ $y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$ ។

ច)សំណើ៣

សន្មតថាចម្លើយលីនេអ៊ែរកកជុំពីរនៃសមីការអូម៉ូសែន៖

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = 0 \text{ ឲ្យដោយអនុគមន៍ } \phi_1(x) \text{ \& } \phi_2(x) \text{ លើដែន } D \subseteq \mathbb{R}$$

នោះចម្លើយដោយឡែក $y_p(x)$ នៃសមីការ $y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$

គឺ $y_p(x) = w_1(x)\phi_1(x) + w_2(x)\phi_2(x)$ ដែល $w_1(x) \text{ \& } w_2(x)$ មានទម្រង់

$$w_1(x) = -\int \frac{f(x)\phi_2(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)} dx \quad \text{និង} \quad w_2(x) = -\int \frac{f(x)\phi_1(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)} dx$$

នៅក្នុងនេះ $W[\phi_1, \phi_2](x)$ ហៅថា *Wronskian* ដែលកំណត់ដោយ៖

$$W[\phi_1, \phi_2](x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} = \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x) \quad \text{។}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមការសន្មតចម្លើយលីនេអ៊ែរអឺក្លែរពីរនៃសមីការអូម៉ូសែន៖

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = 0 \quad \text{ឲ្យដោយអនុគមន៍} \phi_1(x) \text{ \& } \phi_2(x) \text{ លើដែន } D \subseteq \mathbb{R}$$

យើងធ្វើការបង្កើត $y_p(x) = w_1(x)\phi_1(x) + w_2(x)\phi_2(x)$ ជាចម្លើយដោយឡែកនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន $y'' + g(x)y' + h(x)y = f(x)$ នោះគេបាន

$$y_p'' + g(x)y_p' + h(x)y_p = f(x) \quad (*)$$

$$\text{ដោយ } y_p = w_1\phi_1 + w_2\phi_2 \quad \text{នោះ } y_p' = w_1'\phi_1 + w_1\phi_1' + w_2'\phi_2 + w_2\phi_2'$$

$$\text{ដោយជ្រើសរើសយក } w_1'\phi_1 + w_2'\phi_2 = 0 \quad (i) \quad \text{នោះ } y_p' = w_1\phi_1' + w_2\phi_2'$$

$$\text{ហើយគេបាន } y_p'' = w_1'\phi_1' + w_1\phi_1'' + w_2'\phi_2' + w_2\phi_2''$$

យកជំនួសក្នុង(*) គេទទួលបាន៖

$$w_1'\phi_1' + w_1\phi_1'' + w_2'\phi_2' + w_2\phi_2'' + g(x)(w_1\phi_1' + w_2\phi_2') + h(x)(w_1\phi_1 + w_2\phi_2) = f(x)$$

ទំនាក់ទំនងនេះអាចសរសេរក្រោមទម្រង់ ៖

$$w_1[\phi_1'' + g(x)\phi_1' + h(x)\phi_1] + w_2[\phi_2'' + g(x)\phi_2' + h(x)\phi_2] + w_1'\phi_1' + w_2'\phi_2' = f(x)$$

ដោយ $\phi_1(x)$ \& $\phi_2(x)$ ជាចម្លើយដោយឡែកនៃ $y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$

$$\text{នោះគេមាន } \begin{cases} \phi_1'' + g(x)\phi_1' + h(x)\phi_1 = 0 \\ \phi_2'' + g(x)\phi_2' + h(x)\phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{គេទាញបាន } w_1'\phi_1' + w_2'\phi_2' = f(x) \quad (ii)$$

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន
$$\begin{cases} w_1' \phi_1 + w_2' \phi_2 = 0 & (i) \\ w_1' \phi_1' + w_2' \phi_2' = f(x) & (ii) \end{cases}$$

យក $W[\phi_1, \phi_2](x) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = \phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2$

ដើម្បីណែនាំលេខមេគុណរបស់ប្រព័ន្ធសមីការដែលគេកំណត់ហៅថា *Wronskian* ។

ហើយ $D_{w_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \phi_2 \\ f(x) & \phi_2' \end{vmatrix} = -\phi_2 f(x)$ និង $D_{w_2'} = \begin{vmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_1' & f(x) \end{vmatrix} = \phi_1 f(x)$

បើ $W[\phi_1, \phi_2](x) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = \phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2 \neq 0$ គេបាន ៖

$$w_1' = \frac{D_{w_1'}}{W[\phi_1, \phi_2](x)} = -\frac{\phi_2(x)f(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)}, \quad w_2' = \frac{D_{w_2'}}{W[\phi_1, \phi_2](x)} = \frac{\phi_1(x)f(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)}$$

ដូចនេះ $w_1(x) = -\int \frac{f(x)\phi_2(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)} dx$ និង $w_2(x) = \int \frac{f(x)\phi_1(x)}{W[\phi_1, \phi_2](x)} dx$

១៨. របៀបដោះស្រាយសមីការអឺលែរ

ទម្រង់ទូទៅនៃសមីការអឺលែរ $x^2 y'' + axy' + by = 0, x \neq 0$

របៀបដោះស្រាយ

យក $y = x^m$ គេបាន $x^2 m(m-1)x^{m-2} + axm x^{m-1} + bx^m = 0$ ដោយ $x \neq 0$

នោះសមីការទៅជា $m(m-1) + am + b = 0 \Leftrightarrow m^2 + (a-1)m + b = 0$

ករណីទី១ មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នាគេបាន $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

ករណីទី២ មានឫសឌុប គេបាន $y_2 = x^m \ln |x|$ នោះចម្លើយទូទៅគឺ ៖

$$y = x^m (c_1 + c_2 \ln |x|)$$

ករណីទី៣ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នានោះគេបាន ៖

$$y = x^u [A \cos(v \ln |x|) + B \sin(v \ln |x|)]$$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ

១. $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$

២. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

៣. $x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0$

ដំណោះស្រាយ

១. សមីការសម្គាល់ $m(m-1) + 2m - 12 = 0$ មានឫស $m = -4, m_2 = 3$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = c_1 x^{-4} + c_2 x^3$

២. សមីការសម្គាល់ $m(m-1) - 3m + 4 = 0$ មានឫសឌុប $m_1 = m_2 = 2$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = x^2 (c_1 + c_2 \ln |x|)$

៣. សមីការសម្គាល់ $m(m-1) + 5m + 13 = 0$ មានឫស $m = -2 \pm 3i$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $y = x^{-2} [c_1 \cos(3 \ln |x|) + c_2 \sin(3 \ln |x|)]$

១៩. សមីការកូស៊ី អឺលែរលំដាប់ទីពីរ

(The second-order Cauchy-Euler equation)

ក) និយមន័យ សមីការ កូស៊ី អឺលែរ លំដាប់ទីពីរមានទម្រង់ទូទៅ ៖

$$(E): x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$$

ដែល $p, q \in \mathbb{R}$ ហើយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើដែន $D \subseteq \mathbb{R}$ ។

ខ) វិធានដោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការកូស៊ី អឺលែរលំដាប់ទីពីរ យើងអាចបង្កើតអថេរ
ឯករាជ្យ z ហើយបម្លែងសមីការកូស៊ី អឺលែរទៅជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

លីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរដែលមានមេគុណថេរ។

ខ) សំណើ

a) ចំពោះ $x > 0$ សមីការកូស៊ី អឺលែ $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy(x) = f(x)$ អាច

សរសេរទៅជាទម្រង់ $\frac{dy^2}{dz^2} + (1-p) \frac{dy}{dz} + qy(z) = f(-e^z)$

ដែលអថេរឯករាជ្យថ្មី z ឲ្យដោយទំនាក់ទំនង $\begin{cases} x = -e^z \Leftrightarrow z = \ln(-x) \\ y(x) = y(z) \end{cases}$

b) ចំពោះ $x < 0$ សមីការកូស៊ី អឺលែ $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy(x) = f(x)$ អាច

សរសេរទៅជាទម្រង់ $\frac{dy^2}{dz^2} + (p-1) \frac{dy}{dz} + qy(z) = f(e^z)$

ដែលអថេរឯករាជ្យថ្មី z ឲ្យដោយទំនាក់ទំនង $\begin{cases} x = e^z \Leftrightarrow z = \ln x \\ y(x) = y(z) \end{cases}$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$១. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$$២. (ax^2 + y^3)dx - \left(\frac{ax^3}{y} + y^2 - y^3\right)dy = 0 \quad \text{ដែល } a \in \mathbb{R}^*$$

$$\left(\text{កត្តាអាំងតេក្រាលគឺ } \varphi(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y^3}}}{y^3} \right) ។$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$១. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

តាង $y = e^x f(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការនោះគេបាន y, y', y'' ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ។

$$\text{គេមាន } y' = e^x [f(x) + f'(x)] \text{ និង } y'' = e^x [f(x) + 2f'(x) + f''(x)]$$

សមីការខាងលើអាចសរសេរទៅជា ៖

$$e^x [f(x) + 2f'(x) + f''(x)] - 2e^x [f(x) + f'(x)] + e^x f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$\text{ឬ } e^x f''(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{នោះគេទាញ } f'(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C_1$$

$$\text{ហើយ } f(x) = \int (\ln x + C_1) dx = x \ln x - x + C_1 x + C_2$$

$$\text{ដូចនេះ } y = e^x (x \ln x - x + C_1 x + C_2) \quad \text{ដែល } C_1, C_2 \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

$$២. (ax^2 + y^3)dx - \left(\frac{ax^3}{y} + y^2 - y^3\right)dy = 0 \quad \text{ដែល } a \in \mathbb{R}^*$$

យើងគុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹងកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $\varphi(x,y) = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}$

$$\text{គេបាន } \left(\frac{ax^2}{y^3} + 1 \right) e^{\frac{x}{y}} dx - \left(\frac{ax^3}{y^4} + \frac{x}{y} - 1 \right) e^{\frac{x}{y}} dy = 0$$

$$\text{តាង } P(x,y) = \left(\frac{ax^2}{y^3} + 1 \right) e^{\frac{x}{y}} \text{ \& } Q(x,y) = - \left(\frac{ax^3}{y^4} + \frac{x}{y} - 1 \right) e^{\frac{x}{y}}$$

$$\text{យើងមាន } \frac{\partial P}{\partial y} = - \left(\frac{3ax^2}{y^4} + \frac{ax^3}{y^5} + \frac{x}{y^2} \right) e^{\frac{x}{y}}$$

$$\text{ហើយនិង } \frac{\partial Q}{\partial x} = - \left(\frac{3ax^2}{y^4} + \frac{ax^3}{y^5} + \frac{x}{y^2} \right) e^{\frac{x}{y}} \text{ នោះគេបាន } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

នាំឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងលើជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដនោះមាន

$$\text{អនុគមន៍ } u = f(x,y) = C_1 \text{ ដែល } du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \text{ (} C_1 : \text{ ចំនួនថេរ)}$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = \left(\frac{ax^2}{y^3} + 1 \right) e^{\frac{x}{y}} & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = - \left(\frac{ax^3}{y^4} + \frac{x}{y} - 1 \right) e^{\frac{x}{y}} & (2) \end{cases}$$

$$\text{តាម(1) គេបាន } u = \int \left(\frac{ax^2}{y^3} + 1 \right) e^{\frac{x}{y}} dx = (Ax^2 + Bx + C)e^{\frac{x}{y}} + \varphi(y)$$

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការគេបាន ៖

$$\left(\frac{ax^2}{y^3} + 1 \right) e^{\frac{x}{y}} = (2Ax + B)e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} (Ax^2 + Bx + C)e^{\frac{x}{y}}$$

$$\text{គេទាញបាន} \begin{cases} \frac{A}{y} = \frac{a}{y^3} \\ 2A + \frac{B}{y} = 0 \\ B + \frac{C}{y} = 1 \end{cases} \text{ នោះ: } A = \frac{a}{y^2}, B = -\frac{2a}{y}, C = y + 2a$$

$$\text{គេបាន } u = \left(\frac{ax^2}{y^2} - \frac{2a}{y}x + y + 2a \right) e^{\frac{x}{y}} + C(y)$$

$$\text{នោះ: } \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{ax^3}{y^4} + \frac{x}{y} - 1 \right) e^{\frac{x}{y}} + C'(y) \quad (3)$$

តាម(2) និង (3) គេទាញបាន $C'(y) = 0$ នោះ: $C(y) = C_2$ ចំនួនថេរ។

$$\text{គេទាញបាន } u = \left(\frac{ax^2}{y^2} - \frac{2a}{y}x + y + 2a \right) e^{\frac{x}{y}} + C_2 = C_1 \text{ យក } C = C_1 - C_2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \left(\frac{ax^2}{y^2} - \frac{2a}{y}x + y + 2a \right) e^{\frac{x}{y}} = C \text{ ជាចម្លើយរបស់សមីការ។}$$

លំហាត់ទី០២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(x^2y + xy^3)dx - (x^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4)dy = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(x^2y + xy^3)dx - (x^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4)dy = 0$$

$$\text{សមីការនេះអាចសរសេរ } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + xy^3}{x^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4}$$

តាង $y = \frac{x}{u}$ នោះ $x = uy$ ហើយ $dx = udy + ydu$

គេបាន $\frac{dy}{udy + ydu} = \frac{u^2 y^3 + uy^4}{u^3 y^3 + u^2 y^4 - uy^4 + y^4} = \frac{u^2 + uy}{u^3 + u^2 y - uy + y}$

ឬ $\frac{udy + ydu}{dy} = \frac{u^3 + u^2 y - uy + y}{u^2 + uy}$

$$u + y \frac{du}{dy} = u - \frac{y(u-1)}{u^2 + uy} \quad \text{ឬ} \quad \frac{du}{dy} = \frac{1-u}{u^2 + uy}$$

គេទាញបាន $(1-u) \frac{dy}{du} - uy = u^2$ ឬ $(u-1) \frac{dy}{du} + uy = -u^2$ (1)

គុណអង្គទាំងពីរនៃ(1) នឹង e^u គេបាន ៖

$$(u-1)e^u \frac{dy}{du} + ue^u y = -u^2 e^u \quad \text{ឬ} \quad \frac{d}{du} [y(u-1)e^u] = -u^2 e^u$$

គេទាញ $y(u-1)e^u = -\int u^2 e^u du = -(u^2 - 2u + 2)e^u + C$

ដោយ $u = \frac{x}{y}$ នោះ $y\left(\frac{y}{x} - 1\right)e^{\frac{y}{x}} = -\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{y} + 2\right)e^{\frac{y}{x}} + C$

ដូចនេះ $\left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{y} + x - y + 2\right)e^{\frac{x}{y}} = C$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ទី០៣

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$(x^4 - x^3 y + x^2 y^2 + 2y^3)dx - xy(x^2 + 2y)dy = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(x^4 - x^3 y + x^2 y^2 + 2y^3)dx - xy(x^2 + 2y)dy = 0$$

$$\text{គេទាញបាន } \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 - x^3y + x^2y^2 + 2y^3}{xy(x^2 + 2y)}$$

$$\text{តាង } y = ux \text{ នោះ } \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}$$

$$\text{គេបាន } u + x \frac{du}{dx} = \frac{x^4 - ux^4 + u^2x^4 + 2u^3x^3}{ux^2(x^2 + 2ux)} = \frac{x - ux + u^2x + 2u^3}{ux + 2u^2}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{x(1-u)}{ux + 2u^2} \quad \text{ឬ} \quad (u-1) \frac{dx}{du} + ux = -2u^2$$

$$\text{គុណអង្គទាំងពីរនឹង } e^u \text{ គេបាន } (u-1)e^u \frac{dx}{du} + ue^ux = -2u^2e^u$$

$$\frac{d}{du}[(u-1)e^ux] = -2u^2e^u$$

$$\text{នាំឲ្យ } (u-1)e^ux = -2 \int u^2e^u du = -2(u^2 - 2u + 2)e^u + C$$

$$\text{ឬ } [(u-1)x + 2(u^2 - 2u + 2)]e^u = C \text{ ដោយ } u = \frac{y}{x}$$

$$\text{ដូចនេះ } \left[2\left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{2y}{x} + 2\right) + (y-x) \right] e^{\frac{y}{x}} = C \text{ ដែល } C \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

លំហាត់ទី០៤

ដោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$១. xy' + (x+1)y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

$$២. (x^2y + y^4)dx - (x^3 + xy^3 + y^4)dy = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$១. xy' + (x+1)y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^x យើងបាន $xe^x y' + (x+1)e^x y = \frac{1}{1+x^2}$

ឬ $\frac{d}{dx}(xe^x y) = \frac{1}{1+x^2}$ នោះគេទាញ $xe^x y = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

ដូចនេះ $y = \frac{\arctan x + C}{xe^x}$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ។

$$២. (x^2 y + y^4) dx - (x^3 + xy^3 + y^4) dy = 0$$

$$\text{គេទាញ } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y + y^4}{x^3 + xy^3 + y^4}$$

តាង $y = \frac{x}{u}$ នោះ $x = uy$ ហើយ $dx = d(uy) = y du + u dy$

$$\text{សមីការទៅជា } \frac{dy}{y du + u dy} = \frac{u^2 y^3 + y^4}{u^3 y^3 + uy^4 + y^4} = \frac{u^2 + y}{u^3 + uy + y}$$

$$\text{ចម្រាស់សមាមាត្រ } \frac{y du + u dy}{dy} = \frac{u^3 + uy + y}{u^2 + y}$$

$$y \frac{du}{dy} + u = u + \frac{y}{u^2 + y}$$

$$\text{គេទាញ } \frac{du}{dy} = \frac{1}{u^2 + y} \quad \text{ឬ} \quad \frac{dy}{du} = u^2 + y \quad \text{ឬ} \quad \frac{dy}{du} - y = u^2$$

ជាសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន ។

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^{-u} គេបាន $e^{-u} \frac{dy}{du} - e^{-u} y = u^2 e^{-u}$

ឬ $\frac{d}{du}(e^{-u} y) = u^2 e^{-u}$ នោះគេទាញបាន $e^{-u} y = \int u^2 e^{-u} du$

$$\text{ឬ } y = e^u \int u^2 e^{-u} du$$

បន្ទាប់ពោះដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគេទទួលបាន៖

$$\int u^2 e^{-u} du = -(u^2 + 2u + 2)e^{-u} + C$$

គេទាញ $y = -(u^2 + 2u + 2) + C e^u$, $C \in \mathbb{R}$ ដោយ $u = \frac{x}{y}$

ដូចនេះ $y = -\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + 2\right) + C e^{\frac{x}{y}}$ ឬ $\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2 = C e^{\frac{x}{y}}$ ។

លំហាត់ទី០៩

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$១. (x^2 - 2x + 2)y' + x^2 y = \frac{x}{(e^x + 1)^2}$$

$$២. (x^3 y + x y^4)dx - (x^4 + x^2 y^3 - x y^4 + y^5)dy = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$១. (x^2 - 2x + 2)y' + x^2 y = \frac{x}{(e^x + 1)^2}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង e^x គេបាន ៖

$$(x^2 - 2x + 2)e^x y' + x^2 e^x y = \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}[(x^2 - 2x + 2)e^x y] = \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{គេទាញ } (x^2 - 2x + 2)e^x y = \int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2} \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2} = -\frac{1}{e^x + 1} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } (x^2 - 2x + 2)e^x y = -\frac{x}{e^x + 1} + \int \frac{dx}{e^x + 1}$$

$$\text{ដោយ } \int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = -\ln(1 + e^{-x}) + C$$

$$\text{នោះ } (x^2 - 2x + 2)e^x y = -\frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + C$$

$$\text{ដូចនេះ } y = -\frac{xe^{-x}}{(x^2 - 2x + 2)(e^x + 1)} - \frac{e^{-x} \ln(1 + e^{-x})}{x^2 - 2x + 2} + \frac{C}{x^2 - 2x + 2} \quad \text{។}$$

ដែល C : ជាចំនួនថេរ ។

$$២. (x^3 y + xy^4) dx - (x^4 + x^2 y^3 - xy^4 + y^5) dy = 0$$

$$\text{គេទាញ } \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 y + xy^4}{x^4 + x^2 y^3 - xy^4 + y^5}$$

$$\text{តាង } u = \frac{x}{y} \text{ នោះ } x = uy \text{ ហើយ } dx = u dy + y du$$

$$\text{គេបាន } \frac{dy}{u dy + y du} = \frac{u^3 y^4 + uy^5}{u^4 y^4 + u^2 y^5 - uy^5 + y^5} = \frac{u^3 + uy}{u^4 + u^2 y - uy + y}$$

$$\text{គេទាញ } \frac{u dy + y du}{dy} = \frac{u^4 + u^2 y - uy + y}{u^3 + uy}$$

$$u + y \frac{du}{dy} = u - \frac{y(u-1)}{u^3 + uy}$$

$$\text{ឬ } \frac{du}{dy} = -\frac{u-1}{u^3 + uy}$$

$$\text{ឬ } (u-1) \frac{dy}{du} + uy = -u^3$$

$$\text{គុណអង្គទាំងពីរនឹង } e^u \text{ គេបាន } (u-1)e^u \frac{dy}{du} + ue^u y = -u^3 e^u$$

$$\text{គេទាញ } \frac{d}{du} [(u-1)e^u y] = -u^3 e^u \text{ នាំឲ្យ } (u-1)e^u y = -\int u^3 e^u dx$$

$$\text{ដោយ } \int u^3 e^u du = (u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u + C_1$$

$$\text{គេបាន } (u-1)e^u y = -(u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u + C \text{ តែ } u = \frac{x}{y}$$

ដូចនេះ $\left(\frac{x^3}{y^3} - 3\frac{x^2}{y^2} + 6\frac{x}{y} + x - y - 6\right)e^{\frac{x}{y}} = C$ ដែល C ចំនួនថេរ។

លំហាត់ទី០៦

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១. $x^2y' + (2x - 1)y = (2x^2 + 1)e^{\frac{x^3-1}{x}}$

២. $(x^2y + y^4)dx - (x^3 + xy^3 + y^4)dy = 0$

គេដឹងថាកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $\varphi(x, y) = -\frac{1}{y^4}e^{-\frac{x}{y}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១. $x^2y' + (2x - 1)y = (2x^2 + 1)e^{\frac{x^3-1}{x}}$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $e^{\frac{1}{x}}$ គេបាន ៖

$$x^2e^{\frac{1}{x}}y' + (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}y = (2x^2 + 1)e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2e^{\frac{1}{x}}y\right) = (2x^2 + 1)e^{x^2}$$

$$x^2e^{\frac{1}{x}}y = \int (2x^2 + 1)e^{x^2} dx = xe^{x^2} + C$$

ដូចនេះ $y = \frac{xe^{x^2} + C}{x^2e^{\frac{1}{x}}}$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

$$២. (x^2y + y^4)dx - (x^3 + xy^3 + y^4)dy = 0$$

គេដឹងថាកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $\varphi(x, y) = -\frac{1}{y^4} e^{-\frac{x}{y}}$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនិង $\varphi(x, y) = -\frac{1}{y^4} e^{-\frac{x}{y}}$ នោះសមីការក្លាយទៅជា

$$\left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right) e^{-\frac{x}{y}} dx + \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right) e^{-\frac{x}{y}} dy = 0 \quad (i)$$

តាង $P(x, y) = \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right) e^{-\frac{x}{y}}$ និង $Q(x, y) = \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right) e^{-\frac{x}{y}}$

គេមាន $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4} e^{-\frac{x}{y}} + \frac{x}{y^2} \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right) e^{-\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x^3}{y^5} + \frac{3x^2}{y^4} - \frac{x}{y^2}\right) e^{-\frac{x}{y}}$

និង $\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{3x^2}{y^4} + \frac{1}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} - \frac{1}{y} \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right) e^{-\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x^3}{y^5} + \frac{3x^2}{y^4} - \frac{x}{y^2}\right) e^{-\frac{x}{y}}$

គេទាញ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ នោះសមីការ(i) ជាសមីការពិតនាំឲ្យមានអនុគមន៍

$u = f(x, y)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right) e^{-\frac{x}{y}} dx + \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right) e^{-\frac{x}{y}} dy = 0$$

នោះគេបាន $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right) e^{-\frac{x}{y}} \quad (1)$ និង $\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right) e^{-\frac{x}{y}} \quad (2)$

តាម(1)គេទាញ $u = \int \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right) e^{-\frac{x}{y}} dx$ តាង $\begin{cases} u_1 = -\frac{x^2}{y^3} - 1 \\ dv_1 = e^{-\frac{x}{y}} dx \end{cases}$

$$\text{នោះ: } \begin{cases} du_1 = -\frac{2x}{y^3} dx \\ v_1 = -y e^{-\frac{x}{y}} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } u = \left(\frac{x^2}{y^2} + y\right) e^{-\frac{x}{y}} - \int \frac{2x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}} dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u_2 = \frac{2x}{y^2} \\ dv_2 = e^{-\frac{x}{y}} dx \end{cases} \quad \text{នោះ: } \begin{cases} du_2 = \frac{2}{y^2} dx \\ v_2 = -y e^{-\frac{x}{y}} \end{cases}$$

$$u = \left(\frac{x^2}{y^2} + y\right) e^{-\frac{x}{y}} + \frac{2x}{y} e^{-\frac{x}{y}} - \int \frac{2}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx = \left(\frac{x^2}{y^2} + y\right) e^{-\frac{x}{y}} + \frac{2x}{y} e^{-\frac{x}{y}} + 2e^{-\frac{x}{y}} + C(y)$$

$$u = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2\right) e^{-\frac{x}{y}} + C(y)$$

$$\text{នោះ: } \frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{2x^2}{y^3} - \frac{2x}{y^2} + 1 + \frac{x^3}{y^4} + \frac{2x^2}{y^3} + \frac{x}{y} + \frac{2x}{y^2}\right) e^{-\frac{x}{y}} + C'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right) e^{-\frac{x}{y}} + C'(y) \quad (3)$$

តាម(2) & (3) គេទាញ $C'(y) = 0$ នោះ $C(y) = C_0$ (អនុគមន៍ថេរ)

$$\text{គេទាញបាន } u = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2\right) e^{-\frac{x}{y}} + C_0 = C_1 \quad \text{ព្រោះ } du = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2\right) e^{-\frac{x}{y}} = C \quad \text{ឬ} \quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2 = C e^{\frac{x}{y}}$$

ដែល $C = C_1 - C_0$ ជាចំណាយថេរ។

លំហាត់ទី០៧

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$9. y' - y = x e^x \sin^2 x$$

$$២. y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$១. y' - y = xe^x \sin^2 x$$

$$\text{តាង } y = e^x f(x) \text{ នោះ } y' = e^x f(x) + e^x f'(x)$$

$$\text{សមីការទៅជា } e^x f(x) + e^x f'(x) - e^x f(x) = xe^x \sin^2 x$$

$$e^x f'(x) = xe^x \sin^2 x$$

$$\text{គេទាញ } f(x) = \int x \sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

$$\text{ដូចនេះ } y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C \right) e^x \text{ ដែល } C : \text{ ចំនួនថេរ។}$$

$$២. y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x \text{ តាង } y = e^{-x} g(x) \text{ នោះ } y' = [g'(x) - g(x)]e^{-x} \text{ និង } y'' = [g''(x) - 2g'(x) + g(x)]e^{-x} \text{ ហើយសមីការអាចសរសេរ ៖}$$

$$[g''(x) - 2g'(x) + g(x) + 2g'(x) - 2g(x) + g(x)]e^{-x} = e^{-x} \ln x$$

$$\text{ឬ } g''(x)e^{-x} = e^{-x} \ln x \text{ នោះ } g'(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x + C_1$$

$$\text{ហើយ } g(x) = \int (x \ln x - x + C_1) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2$$

$$\text{ដូចនេះ } y = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2 \right) e^{-x} \text{ ដែល } C_1, C_2 \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

លំហាត់ទី០៨

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 4y' + 4y = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 4y' + 4y = \left(\frac{e^x}{x}\right)^2$ (1)

តាង $y = ze^{2x}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការនោះ y, y', y'' ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(1) ។

គេមាន $y' = (z' + 2z)e^{2x}$ និង $y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$
សមីការ(1) ក្លាយទៅជា ៖

$$(z'' + 4z' + 4z)e^{2x} - 4(z' + 2z)e^{2x} + 4ze^{2x} = \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$(z'' + 4z' + 4z - 4z' - 8z + 4z)e^{2x} = \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$z'' = \frac{1}{x^2}$$

គេទាញ $z' = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_1$ ដែល C_1 ជាចំនួនថេរណាមួយ។

គេទាញ $z = \int \left(-\frac{1}{x} + C_1\right) dx = -\ln|x| + C_1x + C_2$ ដែល C_2 ចំនួនថេរ។

ដោយ $y = ze^{2x}$ នោះ $y = [-\ln|x| + C_1x + C_2]e^{2x}$ ។

ដូចនេះ $y = [-\ln|x| + C_1x + C_2]e^{2x}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ។

ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរណាមួយ។

លំហាត់ទី០៩

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$១. \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4xy + 5y^2}{2x^2 - 10xy + 21y^2}$$

$$២. y'' - 4y' + 4y = \frac{xe^{2x}}{x^2 + 1}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$១. \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4xy + 5y^2}{2x^2 - 10xy + 21y^2} \quad \text{តាង } y = ux \quad \text{នោះ } \frac{dy}{dx} = u + \frac{xdu}{dx}$$

$$\text{គេបាន } u + x \frac{du}{dx} = \frac{3x^2 - 4x^2u + 5x^2u^2}{2x^2 - 10x^2u + 21x^2u^2}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{3 - 4u + 5u^2}{2 - 10u + 21u^2} - u$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{3 - 6u + 15u^2 - 21u^3}{2 - 10u + 21u^2}$$

$$\text{គេទាញ } \frac{2 - 10u + 21u^2}{1 + 2u - 5u^2 + 7u^3} du = -3 \frac{dx}{x}$$

$$\text{គេបាន } \int \frac{21u^2 - 10u + 2}{7u^3 - 5u^2 + 2u + 1} du = -3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |7u^3 - 5u^2 + 2u + 1| = -3 \ln |x| + \ln |C_1| \quad \text{ដោយ } y = ux$$

$$\text{នោះ } \ln \left| \frac{7y^3}{x^3} - \frac{5y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} + 1 \right| = \ln \left| \frac{C_1}{x^3} \right|$$

$$\text{គេទាញ } \frac{7y^3}{x^3} - \frac{5y^2}{x^2} + \frac{2y}{x} + 1 = \frac{C}{x^3} \quad \text{ដែល } C = \pm C_1 \text{ ជាចំនួនថេរ។}$$

$$\text{ដូចនេះ } x^3 + 2x^2y - 5xy^2 + 7y^3 = C \quad \text{។}$$

$$២. y'' - 4y' + 4y = \frac{xe^{2x}}{x^2 + 1} \quad \text{តាង } y = e^{2x}f(x) \quad \text{នោះ } y' = [2f(x) + f'(x)]e^{2x}$$

$$\text{និង } y'' = [4f(x) + 4f'(x) + f''(x)]e^{2x} \quad \text{នោះសមីការបម្លែងទៅជា ៖}$$

$$[4f(x) + 4f'(x) + f''(x) - 8f(x) - 4f'(x) + 4f(x)]e^{2x} = \frac{xe^{2x}}{x^2 + 1}$$

គេទាញ $f'(x) = \int \frac{xdx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C_1$

ហើយ $f(x) = \int \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C_1 \right] dx$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 1) - x + \arctan x + C_1 x + C_2$$

ដូចនេះ $y = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 1) - x + \arctan x + C_1 x + C_2 \right] e^{2x}$ ។

ដែល C_1, C_2 ជាចំនួនថេរ ។

លំហាត់ទី១០

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 2y' + y = e^x \sin^3 x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 2y' + y = e^x \sin^3 x$

តាង $y = u e^x$ នោះ $y' = (u' + u)e^x$ និង $y'' = (u'' + 2u' + u)e^x$

សមីការទៅជា $u'' e^x = e^x \sin^3 x$ នោះគេទាញបាន ៖

$$u' = \int \sin^3 x dx = \frac{1}{4} \int (3 \sin x - \sin 3x) dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x + C_1$$

ហើយ $u = \int \left(-\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x + C_1 \right) dx$

$$u = -\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{36} \sin 3x + C_1 x + C_2$$

ដូចនេះ $y = \left(-\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{36} \sin 3x + C_1 x + C_2 \right) e^x$ ដែល C_1, C_2 ថេរ។

លំហាត់ទី១១

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$១. y' + 2xy = 2x^2 + 1$$

$$២. x^2 y' - y = x^3 e^{x - \frac{1}{x}}$$

$$៣. \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^3}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$១. y' + 2xy = 2x^2 + 1$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង e^{x^2} គេបាន ៖

$$y' e^{x^2} + 2x e^{x^2} y = (2x^2 + 1) e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(y e^{x^2}) = (2x^2 + 1) e^{x^2}$$

$$\text{គេទាញ } y e^{x^2} = \int (2x^2 + 1) e^{x^2} dx = x e^{x^2} + C$$

ដូចនេះ $y = x + C e^{-x^2}$ ដែល C : ចំនួនថេរ ។

$$២. x^2 y' - y = x^3 e^{x - \frac{1}{x}}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ នោះគេបាន $y' e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} y = x e^x$

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\frac{1}{x}} \right) = x e^x \quad \text{នោះ } y e^{\frac{1}{x}} = \int x e^x dx = (x - 1) e^x + C$$

ដូចនេះ $y = (x - 1) e^{x - \frac{1}{x}} + C e^{-\frac{1}{x}}$ ដែល C : ចំនួនថេរ ។

$$\text{៣. } \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^3} \quad \text{តាង } y = ux \quad \text{នោះ } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{គេបាន } u + x \frac{du}{dx} = \frac{x^4 + u^4 x^4}{x^4 u^3} \quad \text{ឬ } x \frac{du}{dx} = \frac{1 + u^4}{u^3} - u = \frac{1}{u^3}$$

$$\text{គេទាញ } u^3 du = \frac{dx}{x} \quad \text{នោះ } \int u^3 du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{ឬ } \frac{1}{4} u^4 = \ln |x| + C \quad \text{ដោយ } y = ux \quad \text{ឬ } u = \frac{y}{x}$$

$$\text{ដូចនេះ } \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} \right)^4 = \ln |x| + C \quad \text{ដែល } C : \text{ ចំនួនថេរ ។}$$

លំហាត់ទី១២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\text{១. } y' - 2y = xe^{2x} \cot^2 x$$

$$\text{២. } y'' - 2y' + y = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\text{១. } y' - 2y = xe^{2x} \cot^2 x$$

តាង $y = e^{2x} f(x)$ នោះ $y' = 2e^{2x} f(x) + e^{2x} f'(x)$ ហើយសមីការទៅជា

$$2e^{2x} f(x) + e^{2x} f'(x) - 2e^{2x} f(x) = xe^{2x} \cot^2 x \quad \text{ឬ } f'(x) = x \cot^2 x$$

$$\text{គេទាញ } f(x) = \int x \cot^2 x dx = -\frac{x^2}{2} - x \cot x + \ln(\sin x) + C$$

ដូចនេះ $y = e^{2x} \left[-\frac{x^2}{2} - x \cot x + \ln(\sin x) + C \right]$ ដែល C ជាចំនួនថេរ។

២. $y'' - 2y' + y = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$ តាង $y = g(x)e^x$ នោះ $y' = [g'(x) + g(x)]e^x$ និង

$y'' = [g''(x) + 2g'(x) + g(x)]e^x$ ហើយសមីការអាចសរសេរជា ៖

$$[g''(x) + 2g'(x) + g(x)]e^x - 2[g'(x) + g(x)]e^x + g(x)e^x = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$$

$$[g''(x) + 2g'(x) + g(x) - 2g'(x) - 2g(x) + g(x)]e^x = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$$

$$e^x g''(x) = \frac{xe^x \sin x}{\cos^3 x}$$

$$g''(x) = \frac{x \sin x}{\cos^3 x}$$

$$\text{គេទាញបាន } g'(x) = \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + C_1$$

$$\text{ហើយ } g(x) = \int \left(\frac{x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \tan x + C_1 \right) dx$$

$$g(x) = \frac{1}{2} x \tan x + \ln |\cos x| + C_1 x + C_2$$

ដូចនេះ $y = e^x \left(\frac{1}{2} x \tan x + \ln |\cos x| + C_1 x + C_2 \right)$ ដែល C_1, C_2 : ថេរ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x \neq 0$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$$x^2 f'(x) = [f(x)]^2 + x f(x) - x^2 \quad (1)$$

ក. កំណត់គ្រួសារអនុគមន៍ចម្លើយ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង (1) ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ចម្លើយ f មួយដែលក្រាបវាកាត់តាមចំណុច (1, 2) ។

ដំណោះស្រាយ

១. កំណត់គ្រួសារអនុគមន៍ចម្លើយ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង (1)

$$\text{យើងមាន } x^2 f'(x) = [f(x)]^2 + xf(x) - x^2 \quad (1)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $x^2 \neq 0$ គេបាន៖

$$f'(x) = \left[\frac{f(x)}{x} \right]^2 + \frac{f(x)}{x} - 1 \quad (2)$$

$$\text{តាង } u = \frac{f(x)}{x} \text{ នោះ } f'(x) = \frac{d(ux)}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{សមីការ (2) ទៅជា } u + x \frac{du}{dx} = u^2 + u - 1$$

$$\text{សមមូល } x \frac{du}{dx} = u^2 - 1 \text{ ឬ } \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\text{ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរគេបាន } \int \frac{du}{u^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{នោះ } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \ln |x| + \ln |c| = \ln |cx| \text{ ដែល } c \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{ឬ } \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = 2 \ln |cx| = \ln (cx)^2$$

$$\text{គេទាញ } \frac{u-1}{u+1} = \pm c^2 x^2 = \lambda x^2 \text{ ដែល } \lambda = \pm c^2, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$u - 1 = \lambda x^2 u + \lambda x^2 \text{ នាំឲ្យ } u = \frac{1 + \lambda x^2}{1 - \lambda x^2} \text{ តែ } u = \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{នោះ } f(x) = \frac{x(1 + \lambda x^2)}{1 - \lambda x^2} \text{ ដែល } \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ ។}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\text{គេមាន } f(x) = \frac{x(1 + \lambda x^2)}{1 - \lambda x^2} \text{ នោះ } \frac{f(x)}{x} = \frac{1 + \lambda x^2}{1 - \lambda x^2}$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះគេបាន៖

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{2\lambda x(1 - \lambda x^2) + 2\lambda x(1 + \lambda x^2)}{(1 - \lambda x^2)^2} = \frac{4\lambda x}{(1 - \lambda x^2)^2}$$

គេទាញ $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{4\lambda x}{(1 - \lambda x^2)^2}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $x \neq 0$ គេបាន $\frac{x^2 f'(x) - xf(x)}{x^2} = \frac{4\lambda x^2}{(1 - \lambda x^2)^2}$

ដោយ $\frac{4\lambda x^2}{(1 - \lambda x^2)^2} = \left(\frac{1 + \lambda x^2}{1 - \lambda x^2} \right)^2 - 1 = \left[\frac{f(x)}{x} \right]^2 - 1$

គេបាន $\frac{x^2 f'(x) - xf(x)}{x^2} = \left[\frac{f(x)}{x} \right]^2 - 1 = \frac{[f(x)]^2 - x^2}{x^2}$

នោះ $xf'(x) = [f(x)]^2 + xf(x) - x^2$ ពិត

ដូចនេះ $f(x) = \frac{x(1 + \lambda x^2)}{1 - \lambda x^2}$ ដែល $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ជាចម្លើយត្រូវរក។

លំហាត់ទី១៤

គេមានអនុគមន៍ f ដែល $y = \frac{e^x}{x}$ ។

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$xy' - (x - 1)y = 0 \quad \text{។}$$

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $xy' - (x - 1)y = \frac{2e^x(4x + 5)}{x^2(x^2 + 2x + 2)}$ ។

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy'' + 2y' - xy = 0$

ដំណោះស្រាយ

១) ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy' - (x - 1)y = 0$

គេមាន $y = \frac{e^x}{x}$

នោះ $y' = \frac{(e^x)'(x) - (x)'(e^x)}{x^2} = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

យើងបាន

$$xy' - (x-1)y = x \left[\frac{(x-1)e^x}{x^2} \right] - (x-1) \left(\frac{e^x}{x} \right) = \frac{(x-1)e^x}{x} - \frac{(x-1)e^x}{x} = 0$$

គ្រប់ $x \neq 0$

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y = \frac{e^x}{x}$ ជាចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$xy' - (x-1)y = 0 \quad \forall$$

ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $xy' - (x-1)y = \frac{2e^x(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)} \quad (1)$

តាង $g(x) = f(x)h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ(1) ដែល $f(x) = \frac{e^x}{x}$

ជាចម្លើយនៃ $xy' - (x-1)y = 0 \quad \forall$

យើងបាន $g'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) \quad \forall$

យក $g(x) = f(x)h(x)$ និង $g'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x)$

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(1) យើងបាន៖

$$x[f'(x)h(x) + f(x)h'(x)] - (x-1)f(x)h(x) = \frac{2e^x(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)}$$

$$xf'(x)h(x) + xf(x)h'(x) - (x-1)f(x)h(x) = \frac{2e^x(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)}$$

$$[xf'(x) - (x-1)f(x)]h(x) + xf(x)h'(x) = \frac{2e^x(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)} \quad (2)$$

ដោយ $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ជាចម្លើយនៃ $xy' - (x-1)y = 0$ នោះ $xf'(x) - (x-1)f(x) = 0$

$$\text{សមីការទៅជា } (0)h(x) + x\left(\frac{e^x}{x}\right)h'(x) = \frac{2e^x(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)} \text{ ឬ}$$

$$e^x h'(x) = \frac{2e^x(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)}$$

$$\text{គេទាញ } h'(x) = \frac{2(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)} \text{ នោះ } h(x) = \int \frac{2(4x+5)dx}{x^2(x^2+2x+2)}$$

$$\text{សរសេរជា រាងកាណូនិក } \frac{2(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C(2x+2)+D}{x^2+2x+2}$$

តម្រូវភាគបែងរួមរួចលុបចោលគេបាន

$$2(4x+5) = Ax(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + Cx^2(2x+2) + Dx^2 \quad (3)$$

$$\text{ចំពោះ } x=0 \text{ គេបាន } 10 = 2B \text{ នោះ } B=5 \text{ ។}$$

$$\text{ដោយសម្គាល់ឃើញថាសមីការ } x^2+2x+2 = (x+1)^2+1=0 \text{ មានឫស } x=-1+i$$

$$\text{ឬ } x=-1-i$$

យើងយក $x=-1+i$ ជំនួសក្នុង(3) យើងបាន ៖

$$2(-4+4i+5) = C(-1+i)^2(-2+2i+2) + D(-1+i)^2$$

$$2+8i = 4C-2iD \text{ គេទាញបាន } C=\frac{1}{2} \text{ និង } D=-4$$

$$\text{យក } x=-1 \text{ ជំនួសក្នុង(3) យើងបាន } 2 = -A+B+D$$

$$\text{នោះ } A = B+D-2 = 5-4-2 = -1$$

$$\text{គេបាន } A=-1, B=5, C=\frac{1}{2}, D=-4$$

$$\text{ហេតុនេះ } \frac{2(4x+5)}{x^2(x^2+2x+2)} = -\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{4}{(x+1)^2+1}$$

$$\begin{aligned} \text{យើងទាញ } h(x) &= -\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)} dx - 4 \int \frac{(x+1)' dx}{(x+1)^2+1} \\ &= -\ln|x| - \frac{5}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) - 4 \arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការគឺ

$$g(x) = f(x)h(x) = \frac{e^x}{x} \left[-\ln|x| - \frac{5}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - 4 \arctan(x+1) + C \right]$$

២) ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy'' + 2y' - xy = 0$

យើងមាន $y = f(x) = \frac{e^x}{x}$ ជាចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy' - (x-1)y = 0$ (4)

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ (4) គេបាន $y' + xy'' - y - (x-1)y' = 0$

សមមូល $xy'' + 2y' - (xy' + y) = 0$ ដោយ $xy' - (x-1)y = 0$

នោះ $xy' + y = xy$ ។

គេទាញ $xy'' + 2y' - xy = 0$ នោះតាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f

ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy'' + 2y' - xy = 0$ ។

លំហាត់ទី១៥

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$\left(\frac{x^2}{y} + y^2 \right) dx - \left(\frac{x^3}{y^2} + xy + y^2 \right) dy = 0 \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\text{គេមាន } \left(\frac{x^2}{y} + y^2 \right) dx - \left(\frac{x^3}{y^2} + xy + y^2 \right) dy = 0$$

$$\frac{x^2 + y^3}{y} dx - \frac{x^3 + xy^3 + y^4}{y^2} dy = 0$$

$$\text{គេទាញ } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y + y^4}{x^3 + xy^3 + y^4}$$

តាង $y = \frac{x}{u}$ នោះ $x = uy$ ហើយ $dx = d(uy) = ydu + udy$

សមីការទៅជា $\frac{dy}{ydu + udy} = \frac{u^2 y^3 + y^4}{u^3 y^3 + uy^4 + y^4} = \frac{u^2 + y}{u^3 + uy + y}$

ចម្រាស់សមាមាត្រ $\frac{ydu + udy}{dy} = \frac{u^3 + uy + y}{u^2 + y}$
 $y \frac{du}{dy} + u = u + \frac{y}{u^2 + y}$

គេទាញ $\frac{du}{dy} = \frac{1}{u^2 + y}$

ឬ $\frac{dy}{du} = u^2 + y$ ឬ $\frac{dy}{du} - y = u^2$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរអ៊ីម៉ូស្តូសែន ។

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^{-u} គេបាន $e^{-u} \frac{dy}{du} - e^{-u} y = u^2 e^{-u}$

ឬ $\frac{d}{du}(e^{-u} y) = u^2 e^{-u}$ នោះគេទាញបាន $e^{-u} y = \int u^2 e^{-u} du$

ឬ $y = e^u \int u^2 e^{-u} du$

បន្ទាប់ពោះដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគេទទួលបាន

$$\int u^2 e^{-u} du = -(u^2 + 2u + 2)e^{-u} + C$$

គេទាញ $y = -(u^2 + 2u + 2) + C e^u, C \in \mathbb{R}$ ដោយ $u = \frac{x}{y}$

ដូចនេះ $y = -\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + 2\right) + C e^{\frac{x}{y}}$ ឬ $\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2 = C e^{\frac{x}{y}}$ ។

សម្គាល់ $\left(\frac{x^2}{y} + y^2\right)dx - \left(\frac{x^3}{y^2} + xy + y^2\right)dy = 0 \quad (i)$

កត្តាអាំងតេក្រាលនៃសមីការខាងលើគឺ $\varphi(x, y) = -\frac{1}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(i) និង $\varphi(x, y) = -\frac{1}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$ នោះសមីការក្លាយទៅជា

$$\left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right)e^{-\frac{x}{y}}dx + \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right)e^{-\frac{x}{y}}dy = 0 \quad (ii)$$

$$\text{តាង } P(x, y) = \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right)e^{-\frac{x}{y}} \text{ និង } Q(x, y) = \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right)e^{-\frac{x}{y}}$$

$$\text{គេមាន } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x^2}{y^4}e^{-\frac{x}{y}} + \frac{x}{y^2}\left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right)e^{-\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x^3}{y^5} + \frac{3x^2}{y^4} - \frac{x}{y^2}\right)e^{-\frac{x}{y}}$$

$$\text{និង } \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{3x^2}{y^4} + \frac{1}{y}\right)e^{-\frac{x}{y}} - \frac{1}{y}\left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right)e^{-\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x^3}{y^5} + \frac{3x^2}{y^4} - \frac{x}{y^2}\right)e^{-\frac{x}{y}}$$

គេទាញ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ នោះសមីការ(ii) ជាសមីការពិតនាំឲ្យមានអនុគមន៍ $u = f(x, y)$ ដែល

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right)e^{-\frac{x}{y}}dx + \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right)e^{-\frac{x}{y}}dy = 0$$

$$\text{នោះគេបាន } \frac{\partial u}{\partial x} = \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right)e^{-\frac{x}{y}} \quad (1) \quad \text{និង} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1\right)e^{-\frac{x}{y}} \quad (2)$$

$$\text{តាម(1)គេទាញ } u = \int \left(-\frac{x^2}{y^3} - 1\right)e^{-\frac{x}{y}}dx \quad \text{តាង} \quad \begin{cases} u_1 = -\frac{x^2}{y^3} - 1 \\ dv_1 = e^{-\frac{x}{y}}dx \end{cases}$$

$$\text{នោះ} \quad \begin{cases} du_1 = -\frac{2x}{y^3}dx \\ v_1 = -ye^{-\frac{x}{y}} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } u = \left(\frac{x^2}{y^2} + y\right)e^{-\frac{x}{y}} - \int \frac{2x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u_2 = \frac{2x}{y^2} \\ dv_2 = e^{-\frac{x}{y}} \partial x \end{cases} \quad \text{នោះ } \begin{cases} du_2 = \frac{2}{y^2} \partial x \\ v_2 = -y e^{-\frac{x}{y}} \end{cases}$$

គេបាន

$$u = \left(\frac{x^2}{y^2} + y \right) e^{-\frac{x}{y}} + \frac{2x}{y} e^{-\frac{x}{y}} - \int \frac{2}{y} e^{-\frac{x}{y}} \partial x = \left(\frac{x^2}{y^2} + y \right) e^{-\frac{x}{y}} + \frac{2x}{y} e^{-\frac{x}{y}} + 2e^{-\frac{x}{y}} + C(y)$$

$$u = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2 \right) e^{-\frac{x}{y}} + C(y)$$

$$\text{នោះ } \frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{2x^2}{y^3} - \frac{2x}{y^2} + 1 + \frac{x^3}{y^4} + \frac{2x^2}{y^3} + \frac{x}{y} + \frac{2x}{y^2} \right) e^{-\frac{x}{y}} + C'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{x}{y} + 1 \right) e^{-\frac{x}{y}} + C'(y) \quad (3)$$

តាម(2) & (3) គេទាញ $C'(y) = 0$ នោះ $C(y) = C_0$ (អនុគមន៍ថេរ)

$$\text{គេទាញបាន } u = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2 \right) e^{-\frac{x}{y}} + C_0 = C_1 \quad \text{ព្រោះ } du = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2 \right) e^{-\frac{x}{y}} = C \quad \text{ឬ} \quad \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + y + 2 = C e^{\frac{x}{y}}$$

$$\text{ដែល } C = C_1 - C_0 \quad \text{។}$$

លំហាត់អនុវត្ត

១. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$\text{ក) } y' + (2x - 1)y = e^{x-x^2} \cos x$$

$$\text{ខ) } y' + y \sin x = e^{\cos x} \tan x$$

$$\text{គ) } y' + 4x^3 y = e^{-x^4} \sin x$$

$$\text{ឃ) } y' + y \tan x = (2x + 1) \cos x$$

$$\text{ង) } (x^2 + 1)^2 y' - 2xy = x^5 + 2x^3 + x \quad \text{ច) } y' - \frac{e^x}{e^x + 1} y = \frac{e^x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\text{ឆ) } (x^2 + x + 1)y' + (2x + 1)y = 4x^3 + 2x \quad \text{ជ) } xy' + 2y = 4x^2 + 9x$$

$$\text{ឈ) } y' + \frac{y}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \ln^3 x}{x}$$

$$\text{ញ) } y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x$$

$$\text{ដ) } y' + \frac{1}{x} y = 3x^2$$

$$\text{ប) } y' + 3x^2 = \frac{xe^{-x^3}}{\sqrt{1+x^4}}$$

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

$$\text{ក. } y' - y = x^2 y^3$$

$$\text{ខ. } y' + \frac{2}{x} y = e^x \sqrt{y}$$

គ. $2xyy' + x = y^2$

ឃ. $y' + y + y^2 \sin x = 0$

ង. $y' - \frac{y}{2x} + \frac{y^3}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$

ច. $y' + \frac{3y}{x} = xy^{\frac{1}{3}}, y(1) = 3$

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក. $y' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + x + 1$

ខ. $y' = -\frac{y^2}{4} - \frac{1}{x^2}$ ដែល $\phi(x) = \frac{2}{x}$ ជាចម្លើយពិសេស។

៤. ដោះស្រាយសមីការ Riccati

ក. $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1, y(0) = \frac{1}{2}$ ដែលមានចម្លើយពិសេស $\phi(x) = x$

ខ. $y' = y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}, y(1) = 2$ ដែលមានចម្លើយពិសេស $\phi(x) = \frac{1}{x}$

គ. $y' = y^2 - \left(\frac{1}{x}\right)y - \left(\frac{1}{x^2}\right), y(1) = 1$ ដែលមានចម្លើយពិសេស $\phi(x) = \frac{1}{x}$

៥. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$

ខ. $(4x^3 + 3x^2y^2 + 2xy^3)dx + (2x^3y + 3x^2y^2 + 8y^3)dy = 0$

គ. $(2x \sin y + y^2 \cos x)dx + (x^2 \cos y + 2y \sin x)dy = 0$

ឃ. $(3x^2 \ln y + \frac{y^3}{x})dx + (\frac{x^3}{y} + 3y^2 \ln x)dy = 0$

ង. $(2x + 3y)dx + (3x + 4y)dy = 0$

ច. $(2x + 2y^2)dx + (x^2 + 4xy + 3y^2)dy = 0$

$$\text{ឆ. } (3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 + 12y^2 - 6y)dy = 0$$

$$\text{ជ. } (\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy = 0$$

$$\text{ឈ. } (\ln \sin y - y \tan x)dx + (x \cos y + \ln \cos x)dy = 0$$

$$\text{ញ. } (e^y + \frac{y}{x})dx + (xe^y + \ln x)dy = 0$$

៦. ដោះស្រាយសមីការ

$$\text{ក. } (e^x \ln y + y)dx + (x + \frac{e^x}{y})dy = 0$$

$$\text{ខ. } (3x^2e^y + y^3e^x)dx + (x^3e^y + 3y^2e^x)dy = 0$$

៧. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{3x + 8y}$$

$$\text{ខ. } \frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 4xy - 3x^2}{2x^2 - 6xy - 12y^2}$$

$$\text{គ. } \frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6x^2y + 6xy^2 - y^3}{2x^3 - 6x^2y + 3xy^2 - 8y^3}$$

$$\text{ឃ. } \frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 - 6x^2y + 6xy^2}{2x^3 - 6x^2y + 4y^3}$$

$$\text{ង. } \frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4 + 6xy^3 - y^4}{-4xy^3 + 9x^2y^2 + 5y^4}$$

៨. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

$$\text{ក. } y' + 2xy = x^3$$

$$\text{ខ. } y'' - 2y' + 2y = 8x^2$$

$$\text{គ. } y' - \frac{2x-1}{x^2}y = 1$$

$$\text{ឃ. } y'' - 2y' + y = e^{3x}$$

$$\text{ង. } y' + y \cos x = \sin x \cos x$$

$$\text{ប. } y'' + y' - 2y = \sin 2x$$

ឆ. $xy' + y = xy^2 \ln x$

ជ. $y'' + 4y = (2x + 3)e^x$

ឈ. $y + y' = \cos x$

ញ. $y'' - y = e^{2x} \cos x$

៩. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

ក. $y' = \frac{x + 3y}{2x + 6y + 5}$

ខ. $y' = \frac{3x + 2y - 7}{x + y - 3}$

គ. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

ឃ. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$

ង. $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$

១០. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{ydy}{\sqrt{1 + y^2}}$

ខ. $\frac{dx}{x^4 + 1} = e^y (\sin y + \cos y)^2 dy$

គ. $(2x + 1)(1 + y^5)^2 dx = y^4 \sqrt{x^2 + x + 4} dy$

ឃ. $x^7 \sqrt{1 + y^4} dx = y^3 (1 + x^4) dy$

ង. $y\sqrt{\tan x} dx = dy$

១១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $y' = \frac{2x - y - 1}{x + y - 5}$

ខ. $y' = \frac{x + y - 6}{x - y + 2}$

គ. $y' = \frac{x + 2y + 4}{2x + 4y + 1}$

$$\text{ឃ. } y' = \frac{4x - 2y + 3}{2x - y + 1}$$

$$\text{ង. } y' = \frac{2x - y - 1}{x + y - 5}$$

$$\text{ច. } y' = \frac{x + y - 6}{x - y + 2}$$

១២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល កូស៊ី អ៊ីលេខាងក្រោមចំពោះ $x > 0$:

$$\text{ក. } x^2 y'' - xy' - 3y = 0$$

$$\text{ខ. } x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$$

$$\text{គ. } x^2 y'' + 3xy' + 2y = x^3$$

$$\text{ឃ. } x^2 y'' - 4xy' + 6y = 12 - x^2$$

១៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល កូស៊ី អ៊ីលេខាងក្រោមចំពោះ $x > 0$:

$$\text{ក. } x^2 y'' + 7xy' + 9y = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ខ. } x^2 y' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2$$

$$\text{គ. } x^2 y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$$

$$\text{ឃ. } x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln x$$

$$\text{ង. } x^2 y'' + xy' + y = \cos(\ln x), y(1) = 2, y'(1) = 3$$

១៤. ដោះស្រាយសមីការ $\forall x \neq 0$

$$\text{ក. } x^2 y'' - 3xy' + 7y = 0$$

$$\text{ខ. } 4x^2 y'' + 8xy' - 3y = 0$$

$$\text{គ. } x^2 y'' - 2y = 0$$

www.mathtoday.wordpress.com