គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ

Mathtoday

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតវិទ្យាល័យ

ចំនួនកុំផ្លិច

* សង្ខេបមេរៀននិងគន្លឹះដោះស្រាយសំខាន់ៗ
* លំហាត់ជ្រើសរើសអមដោយដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ
* លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត

អ្នករៀបរៀង លឹម ផល្គុន

2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយ៍មិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !

សៀវភៅ **ចំនួនកុំផ្លិច** សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់នៅក្នុងដៃនេះខ្ញុំបាទបាន រៀបរៀងនិពន្ធឡើង ទុកជាឯកសារសម្រាប់សិស្សថ្នាក់ទី១២ព្រមទាំងអ្នកស្រាវជ្រាវទាំងអស់ ដែលមានបំណងចង់យល់ដឹងអំពីប្រភេទ លំហាត់ចំនួនកុំផ្លិចឲ្យបានកាន់តែច្បាស់លាស់ថែមទៀត ។

សៀវភៅ **ចំនួនកុំផ្លិច** ចែកចេញជា៤ជំពូកធំៗដែលយើងខ្ញុំបានរៀបរៀងជាជំពូកផ្សេងៗគ្នាបែបនេះដើម្បីជួយ សម្រួលនិងមានភាពងាយស្រួលសម្រាប់អ្នកសិក្សាធ្វើការស្រាវជ្រាវឬស្វ័យសិក្សា។
កំហុសឆ្គងខ្លះប្រាកដជាកើតមានឡើងជាក់ជាពុំខាន អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំបាទយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធនិងរៀបរៀង រង់ចាំ ជានិច្ចនូវ មតិរិះគន់ បែបស្ថាបនា ពីសំណាក់អ្នកសិក្សា ក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឲ្យកាន់តែល្អ ប្រសើរបន្ថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមជូនពរ ដល់សិស្សានុសិស្ស និងអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវ ទាំងអស់ មានសុខភាពល្អ មានសុភមង្គលនិងទទួលបានជ័យជំនះរាល់ការបំពេញការងារផ្សេងៗកុំបីអាក់ខានឡើយ ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី១០ ឧសភា ឆ្នាំ២០១៩

អ្នកនិពន្ធនិងរៀបរៀង **លឹម ផល្គុន**

ជំពូកទី០១

មេរៀនសង្ខេបនិងរូបមន្តសំខាន់ៗ

១.ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

១.១.និយមន័យ(Definition of complex Numbers)

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតគឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែលក្រោយពីបង្រួមរួចមានទម្រង់ទូទៅ $z = a + i.b$ ដែល $a, b \in \mathbb{R}$ និង $i = \sqrt{-1}$ ឬ $i^2 = -1$ (ឯកតានិម្មិត) ។ a ហៅថាផ្នែកពិតដែលគេអាចតាងដោយ $\operatorname{Re}(z) = a$ និង b ហៅថាផ្នែកនិម្មិតដែលគេអាចតាងដោយ $\operatorname{Im}(z) = b$ ។

ឧទាហរណ៍១

$z = 1 + 2i$ ជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតដែលមានផ្នែកពិត $\operatorname{Re}(z) = a = 1$ និងមានផ្នែកនិម្មិត $\operatorname{Im}(z) = 2$ ។

ឧទាហរណ៍២

$z = -3 + 7i$ ជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតដែលមានផ្នែកពិត $\operatorname{Re}(z) = a = -3$ និងមានផ្នែកនិម្មិត $\operatorname{Im}(z) = 7$ ។

ឧទាហរណ៍៣

$z = 4i$ ជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតដែលមានផ្នែកពិត $\operatorname{Re}(z) = a = 0$ និងមានផ្នែកនិម្មិត $\operatorname{Im}(z) = 4$ ។

ឧទាហរណ៍៤

$z = 5$ ជាចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតដែលមានផ្នែកពិត $\operatorname{Re}(z) = a = 5$ និងមានផ្នែកនិម្មិត $\operatorname{Im}(z) = 0$ ។

១.២.ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា(Equality of two complex numbers)

$$A+i.B=a+i.b \Leftrightarrow \begin{cases} A=a \\ B=b \end{cases}$$ ដែល $a,b,A,B \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍១. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=(3a+1)+i(2b-5)$ និង $w=7+3i$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។ កំណត់តម្លៃa និង b ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់a និង b

យើងបាន $z=w$ សមមូល $\begin{cases} 3a+1=7 \\ 2b-5=3 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ ។

ដូចនេះ $a=2$, $b=4$ ។

ឧទាហរណ៍២. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=(a+b)+i(a-b)$ និង $w=3+7i$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។ កំណត់តម្លៃa និង b ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់a និង b

យើងបាន $z=w$ សមមូល $\begin{cases} a+b=3 \\ a-b=7 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$ ។

ដូចនេះ $a=5$, $b=-2$ ។

ឧទាហរណ៍៣. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=(a-b+2)+i(a^2+b^2)$ និង $w=3+5i$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។ កំណត់តម្លៃa និង b ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ a និង b

យើងបាន $z=w$ សមមូល $\begin{cases} a-b+2=3 & (1) \\ a^2+b^2=5 & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេទាញបាន $a=b+1$ (3) យកជំនួសក្នុងសមីការ(2)គេបាន៖

$(b+1)^2+b^2=5$ សមមូល $2b^2+2b-4=0$ នោះគេទាញ $b_1=1, b_2=-2$ ។

.ចំពោះ $b_1=1$ តាម(3) គេបាន $a_1=1+1=2$ ។

.ចំពោះ $b_2=-2$ តាម (3)គេបាន $a_2=-2+1=-1$ ។

ដូចនេះ $a_1=2$, $b_1=1$ ឬ $a_2=-1$, $b_2=-2$ ។

ឧទាហរណ៍៤. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=(4a^2-9b^2)+i(2a-3b+5)$

និង $w=7(4+i)$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

កំណត់តម្លៃa និង b ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ a និង b

យើងបាន $z=w$ សមមូល $\left(4a^2-9b^2\right)+i\left(2a-3b+5\right)=7\left(4+i\right)$

គេទាញ $\begin{cases} 4a^2-9b^2=28 \\ 2a-3b+5=7 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} (2a-3b)(2a+3b)=28 \\ 2a-3b=2 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 2\left(2a+3b\right)=28 \\ 2a-3b=2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} 2a+3b=14 \\ 2a-3b=2 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធសមីការនេះគេទទួលបាន $a=4$, $b=2$ ។

១.៣.ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់(Complex conjugate)

បើ $z=a+i.b$ នោះ $\overline{z}=a-i.b$ ហៅថាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ $z=7+3i$ និង $w=-5-2i$ ។ កំណត់ $\overline{z}$ និង $\overline{w}$ ។

គេមាន $z=7+3i$ នោះគេបាន $\overline{z}=7-3i$ ។

ហើយ $w=-5-2i$ នោះគេបាន $\overline{w}=-5+2i$ ។

១.៤.ប្រមាណវិធីលើកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត(Basic operations)

ក. វិធីបូក (Addition of complex numbers)

$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិត។

ខ. វិធីដក (Subtraction of complex numbers)

$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិត។

គ. វិធីគុណ (Multiply complex numbers)

$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad-bc)$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិត។

ឃ.វិធីចែក (Divide of two complex numbers)

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិតនិង $c\neq 0,d\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍១

ចូរគណនាចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមរួចសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

$A=2(1+i)-3(1-i)$, $B=2(3-2i)+3(-1+i)$, $C=(2+i)(1-3i)$

ដំណោះស្រាយ

គណនានិងសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

យើងបាន $A = 2(1+i)-3(1-i) = 2+2i-3+3i = -1+5i$ ។

$B = 2(3-2i)+3(-1+i) = 6-4i-3+3i = 3-i$ ។

$C = (2+i)(1-3i) = 2-6i+i-3i^2 = 2-6i+i+3 = 5-5i$ ។

ដូចនេះ $A = -1+5i$, $B = 3-i$, $C = 5-5i$ ។

ឧទាហរណ៍២

ចូរគណនាចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមរួចសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

$$A = \frac{1+5i}{1-i} \ , \ B = \frac{5-i}{2-3i} \ , \ C = \frac{3+i}{1+2i} - \frac{1+3i}{1-2i} \ , \ D = \frac{7+9i}{(1+i)(2-3i)}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនានិងសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

យើងបាន $A = \frac{1+5i}{1-i} = \frac{(1+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+5i-5}{1+1} = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i$

$$B = \frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10+15i-2i+3}{4+9i} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$$

$$C = \frac{3+i}{1+2i} - \frac{1+3i}{1-2i} = \frac{(3+i)(1-2i)-(1+3i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{3-6i+i+2-1-2i-3i+6}{1+4} = \frac{10-10i}{5} = 2-2i$$

$$D = \frac{7+9i}{(1+i)(2-3i)} = \frac{7+9i}{2-3i+2i+3} = \frac{7+9i}{5-i} = \frac{(7+9i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$$

$$=\frac{35+7i+45i-9}{25+1}=\frac{26+52i}{26}=\frac{26(1+2i)}{26}=1+2i$$

ដូចនេះ $A=-2+3i$, $B=1+i$, $C=2-2i$, $D=1+2i$ ។

ឧទាហរណ៍៣.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=-1+5i$ និង $W=1+i$ ។

ចូរគណនា $Z+W$, $Z-W$, $Z\times W$ និង $\frac{Z}{W}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $Z+W$, $Z-W$, $Z\times W$ និង $\frac{Z}{W}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $Z=-1+5i$ និង $W=1+i$

យើងបាន $Z+W=(-1+5i)+(1+i)=(-1+1)+(5i+i)=6i$

$$Z-W=(-1+5i)-(1+i)=-1+5i-1-i=-2+4i$$

$$Z\times W=(-1+5i)(1+i)=-1-i+5i+5i^2=-6+4i$$

និង $\frac{Z}{W}=\frac{-1+5i}{1+i}=\frac{(-1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+i+5i-5i^2}{1-i^2}$

$$=\frac{-1+6i+5}{2}=2+3i$$

ដូចនេះ $Z+W=6i$, $Z-W=-2+4i$, $Z\times W=-6+2i$ និង $\frac{Z}{W}=2+3i$ ។

ឧទាហរណ៍៤.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=2+3i$ និង $y=-1+2i$

១.ចូរស្រាយថា $x^2-4x+13=0$ និង $y^2+2y+5=0$

២.ចូរសរសេរ $Z=\frac{4(x-3)^2}{x^2+1}+\frac{2(y+2)^2}{y^2+1}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយថា $x^2-4x+13=0$ **និង** $y^2+2y+5=0$

យើងមាន $x=2+3i$ ឬ $x-2=3i$

លើកជាការេ $(x-2)^2=(3i)^2$

ឬ $x^2-4x+4=9i^2=-9$ ឬ $x^2-4x+13=0$ ពិត។

ហើយ $y=-1+2i$ នោះ $y+1=2i$

លើកជាការេ $(y+1)^2=(2i)^2$

ឬ $y^2+2y+1=4i^2=-4$ ឬ $y^2+2y+5=0$ ពិត

ដូចនេះ $x^2-4x+13=0$ និង $y^2+2y+5=0$ ។

២.សរសេរ $Z=\dfrac{4(x-3)^2}{x^2+1}+\dfrac{2(y+2)^2}{y^2+1}$ **ជាទម្រង់ពីជគណិត**

គេមាន $x^2-4x+13=0$ នោះ $x^2+1=4x-12=4(x-3)$

ហើយ $y^2+2y+5=0$ នោះ $y^2+1=-2y-4=-2(y+2)$

យើងបាន $Z=\dfrac{4(x-3)^2}{x^2+1}+\dfrac{2(y+2)^2}{y^2+1}=\dfrac{4(x-3)^2}{4(x-3)}+\dfrac{2(y+2)^2}{-2(y+2)}$

$$=(x-3)-(y+2)=x-y-5$$

$$=(2+3i)-(-1+2i)-5=-2+i$$

ដូចនេះ $Z=-2+i$ ។

ឧទាហរណ៍៨.ចូរគណនា $Z=\dfrac{(1+3i)^2}{1+i}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត រួចបញ្ជាក់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា Z ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $Z=\dfrac{(1+3i)^2}{1+i}=\dfrac{1+6i+9i^2}{1+i}=\dfrac{(-8+6i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

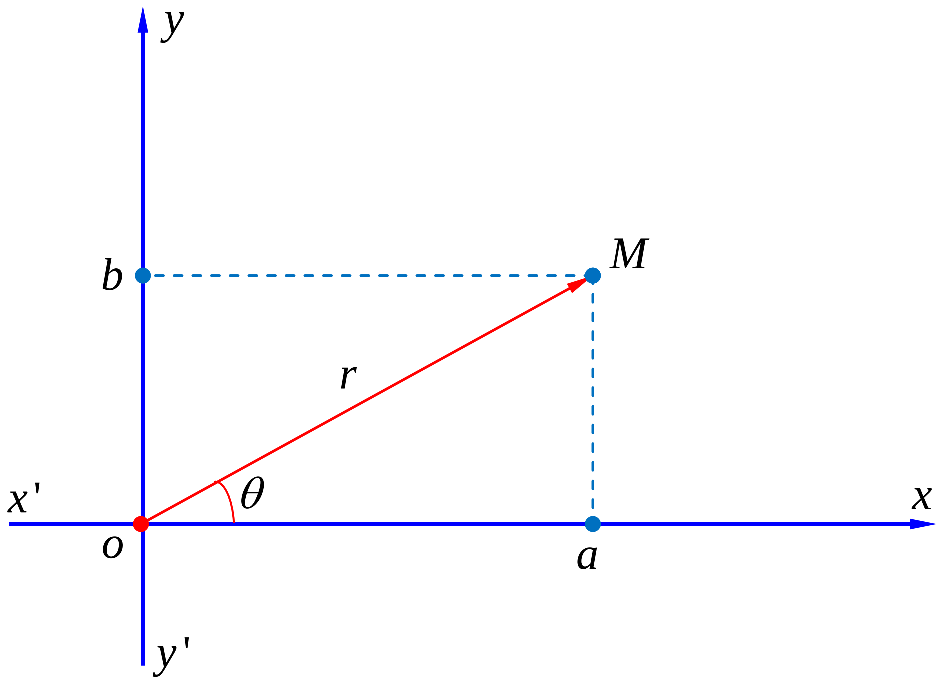
$$=\frac{-8+8i+6i-6i^2}{1-i^2}=\frac{-2+14i}{2}=-1+7i$$

ដូចនេះ $Z=-1+7i$ ។

ផ្នែកពិតនៃ Z គឺ $\text{Re}(Z)=-1$ និងផ្នែកនិម្មិត $\text{Im}(Z)=7$ ។

២.ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

២.១.ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់ (Modulus and argument of a complex number)



ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$; $a,b\in\mathbb{R}$ ។ យក $M(a,b)$ ជារូបភាព នៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។ តាង $r=OM$ និង θ ជាមុំផ្គុំដោយ $\overrightarrow{OM}$ និង (ox) ។ $r=|z|=OM=\sqrt{a^2+b^2}$ ហៅថាម៉ូឌុលនិង $\theta=\arg(z)$ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ដែល $\cos\theta=\frac{a}{r}$ និង $\sin\theta=\frac{b}{r}$ ។

២.២.ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រឬទម្រង់ប៉ូលែនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ៖

(Polar Form of a Complex Number)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib=r\left(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\right)$ **ដោយ** $\cos\theta=\frac{a}{r}$ **និង** $\sin\theta=\frac{b}{r}$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ដែល $r>0$ និង $\theta\in\mathbb{R}$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

$a)\ z = 2 + 2i$ $b)\ z = \sqrt{3} + i$ $c)\ z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$d)\ z = 2 - 2i\sqrt{3}$ $e)\ z = -1 + i\sqrt{3}$ $f)\ z = -3 + i\sqrt{3}$

$g)\ z = -1 - i$ $h)\ z = -2\sqrt{3} - 2i$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

$$a)\ z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$b)\ z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$c)\ z = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$d)\ z = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$e)\ z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f)\ z = -3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$g)\ z = -1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$h)\ z = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

២.៣.ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច ៖

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ និង $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

✍ វិធីគុណ (Multiplying Complex Numbers in Polar Form)

$$z\times w=r.\rho[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)]$$

✍ វិធីចែក (Division)

$$\frac{z}{w}=\frac{r}{\rho}[\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)]$$

ឧទាហរណ៍១ .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ និង $w=-3+i\sqrt{3}$ ។

ក.ចូរសរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.គណនា zw និង $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ។

$w=-3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ។

ខ.គណនា zw និង $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងមាន $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ និង $w=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

យើងបាន $zw=(2)(2\sqrt{3})\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $zw=4\sqrt{3}\left(\cos\frac{25\pi}{12}+\sin\frac{25\pi}{12}\right)=4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

ហើយ $\frac{z}{w}=\frac{2}{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២ .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ និង $w=3+i\sqrt{3}$ ។

ក.ចូរសរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.គណនា zw និង $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

$w=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ខ.គណនា zw និង $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងមាន $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ និង $w=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

យើងបាន $zw=(2)(2\sqrt{3})\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $zw = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ។

ហើយ $\frac{z}{w} = \frac{2}{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៣ .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ និង $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។

ចូរសរសេរ z, w , $z \times w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ z, w , $z \times w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $z = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ដូចនេះ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ និង $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ដូចនេះ $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

$z \times w = (4)(2)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $z \times w = 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

ហើយ $\frac{z}{w} = \frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $\frac{z}{w} = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៤ .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\dfrac{2+i\,(\sqrt{3}+1)}{2}$ និង $b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$ ។

១.គណនា $z=a+b$, $w=a-b$ និង $\dfrac{z}{w}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២.សរសេរ z, w និង $\dfrac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $z=a+b$, $w=a-b$ និង $\dfrac{z}{w}$

គេមាន $a=\dfrac{2+i(\sqrt{3}+1)}{2}$ និង $b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

យើងបាន $z=a+b=1+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i=1+i\sqrt{3}$

ហើយ $w=a-b=1+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i=1+i$ ។

$$\frac{z}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{1^2-i^2}=\frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$ ។

ដូចនេះ $z=1+i\sqrt{3}$, $w=1+i$ និង $\dfrac{z}{w}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ។

២.សរសេរ z, w និង $\dfrac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $z=1+i\sqrt{3}=2(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})$

ហើយ $w=1+i=\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$

និង $\dfrac{z}{w}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})\right]=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

៣.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

គេមាន $\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ និង $\frac{z}{w}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

គេទាញបាន $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

សមមូល $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍៨ .គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a=1+i\sqrt{3}$ និង $b=-1+i\sqrt{3}$ ។

១.គណនា $z=2a-b$ និង $w=a-2b$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត រួចបង្ហាញថា z និង w ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។

២.ចូរសរសេរ $a\,,b\,,z$ និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $z=2a-b$ និង $w=a-2b$

យើងបាន $z=2(1+i\sqrt{3})-(-1+i\sqrt{3})=2+2i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}=3+i\sqrt{3}$

ហើយ $w=(1+i\sqrt{3})-2(-1+i\sqrt{3})=1+i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}=3-i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z=3+i\sqrt{3}$ និង $w=3-i\sqrt{3}$ ។

បង្ហាញថា z និង w ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ៖

យើងមាន $z=3+i\sqrt{3}$ នោះ $\bar{z}=3-i\sqrt{3}=w$ ព្រោះ $w=3-i\sqrt{3}$ ។

ដូចនេះ z និង w ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។

២.សរសេរ a , b , z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $a = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$b = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 3\left[\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{3})\right] = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$w = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

ដូចនេះ $a = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $b = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $w = 2\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៦ .គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = 2 + \sqrt{3} + i$

ក.ចូរបង្ហាញថាម៉ូឌុល $|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ។

ខ.សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថាម៉ូឌុល $|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

គេមាន $Z = 2 + \sqrt{3} + i$

យើងបាន $|Z| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1}$

$|Z| = \sqrt{8 + 4\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

ដូចនេះ $|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $Z=2+\sqrt{3}+i=2\,(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2})$

$$=2(1+\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})$$

$$=2(2\cos^2\frac{\pi}{12}+2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12})$$

$$=4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})$$

ដូចនេះ: $Z=4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})$ ។

ទាញឱ្យបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

គេមាន $Z=4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})$ នាំឱ្យ $|Z|=4\cos\frac{\pi}{12}$

ដោយគេមាន $|Z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ នាំឱ្យ $4\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

ដូចនេះ: $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍៧ .គេឲ្យសមីការ $(E):z^2+iaz+a+ib=0$ ដែល $a\,,b\in\mathbb{R}$

១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $z_1=-1+i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់ (E) រួចគណនាឫសមួយទៀត z_2 ។

២.ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣.ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់ a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ $z_1=-1+i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់ (E) លុះណាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់

នឹងសមីការគេបាន $(-1+i\sqrt{3})^2+ia(-1+i\sqrt{3})+a+ib=0$

$$1-2\sqrt{3}\,i-3-ia-a\sqrt{3}+a+ib=0$$

$$(-2+a-a\sqrt{3})+i(-2\sqrt{3}-a+b)=0$$

គេទាញ $\begin{cases}-2+a-a\sqrt{3}=0\\ -2\sqrt{3}-a+b=0\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $a=-1-\sqrt{3}$ និង $b=-1+\sqrt{3}$ ។

ដូចនេះ $a=-1-\sqrt{3}$ និង $b=-1+\sqrt{3}$ ។

គណនាឫសមួយទៀត z_2 ៖

ដោយ z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

គេបាន $z_1+z_2=-ia$ នោះ $z_2=-i(-1-\sqrt{3})-(-1+i\sqrt{3})=1+i$ ។

ដូចនេះ $z_2=1+i$ ។

២.សរសេរ z_1 , z_2 និង $\dfrac{z_2}{z_1}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $z_1=-1+i\sqrt{3}=2(-\dfrac{1}{2}+i.\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i.\sin\dfrac{2\pi}{3})$

$z_2=1+i=\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i.\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i.\sin\dfrac{\pi}{4})$

និង $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})+i.\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})\right]=\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i.\sin\dfrac{5\pi}{12})$

៣.ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន៖

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12})\quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}\quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍៨ .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=-\sqrt{3}+i$ និង $b=\sqrt{2}(1+i)$

ក.គណនា $z=a^2+b^2+3a\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-3i)b$ រួចកំណត់ម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់របស់ z ។

ខ.ចូរសរសេរ $u=a.b$ និង $v=\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា z រួចកំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z

គេមាន $z=a^2+b^2+3a\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-3i)b$

$=a^2+b^2+3a\sqrt{3}+\sqrt{2}b-3\sqrt{2}ib$

$=(a+\sqrt{3})^2+(b-i\sqrt{2})^2+a\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-i)b-1$

ដោយ $a=-\sqrt{3}+i$ និង $b=\sqrt{2}(1+i)$ នោះគេបាន ៖

$z=(-\sqrt{3}+i+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3}+i)\sqrt{3}+2(1-i)(1+i)-1$

$=-1+2-3+i\sqrt{3}+4-1$

$=1+i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z=1+i\sqrt{3}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $z=1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

ដូចនេះ z មានម៉ូឌុល $r=2$ និង អាគុយម៉ង់ $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

ខ.សរសេរ $u=a.b$ និង $v=\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមាន $a=-\sqrt{3}+i=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2})=2(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$$= 2[\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{6})] = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$

ហើយ $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

នោះ $u = a.b = 4[\cos(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4})] = 4(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$

ហើយ $v = \frac{a}{b} = \frac{2}{2}[\cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4})] = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$

ដូចនេះ $u = 4(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$ និង $v = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

ឧទាហរណ៍៩ .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = -1 + i\sqrt{3}$ និង $b = -1 - i\sqrt{3}$

$a)$ ចូរសរសេរ $z = a^2 + b^2 + \sqrt{3}a + ib + 2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

$b)$ ចូរសរសេរ a, b និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

$a)$ **សរសេរ** $z = a^2 + b^2 + \sqrt{3}a + ib + 2$ **ជាទម្រង់ពីជគណិត**

គេបាន $z = (-1 + i\sqrt{3})^2 + (-1 - i\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}(-1 + i\sqrt{3}) + i(-1 - i\sqrt{3}) + 2$

$$= 1 - 2i\sqrt{3} - 3 + 1 + 2i\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} + 3i - i + \sqrt{3} + 2 = -2 + 2i$$

ដូចនេះ $z = -2 + 2i$ ។

$b)$ **សរសេរ** a, b **និង** z **ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ**

$$a = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left[\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{3})\right] = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$b = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left[\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})\right] = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$Z=-2+2i=2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{4})\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $a=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $b=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

និង $Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍១០ .គេមានចំនួនកុំផ្លិចបី៖

$z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=1+i\sqrt{3}$ និង $z_3=\sqrt{3}+i$ ។

$a)$ ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $a+ib=\sqrt{2}z_1+iz_2+z_3$ ។

$b)$ ចូរសរសេរ z_1,z_2,z_3 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

$a)$ **កំណត់ពីរចំនួនពិត** a **និង** b **ដោយដឹងថា** $a+ib=\sqrt{2}z_1+iz_2+z_3$

យើងបាន $a+ib=\sqrt{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})+i\left(1+i\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}+i\right)$

$$a+ib=2+2i+i-\sqrt{3}+\sqrt{3}+i=2+4i$$

ដូចនេះ $a=2$,$b=4$ ។

$b)$ **សរសេរ** z_1,z_2,z_3 **ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ**

យើងបាន $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z_2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

២.៤.ទ្រឹស្តីបទដឺមរ៍ (De Moivre's theorem)

គ្រប់ចំនួនពិត φ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ n គេបាន ៖

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + i.\sin(n\varphi)$$

ឧទាហរណ៍១. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ ។

គណនា z^{2019} ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា z^{2019} ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$ តាមទ្រឹស្តីបទដឺម៉័រយើងបាន ៖

$$z^{2019} = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019} = \cos\frac{2019\pi}{12} + i\sin\frac{2019\pi}{12}$$

$$= \cos(168\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(168\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $z^{2019} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍២. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ ។ គណនា z^{2019} ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា z^{2019} ៖

យើងមាន $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ តាមទ្រឹស្តីបទដឺម៉័រយើងបាន ៖

$$z^{2019} = \left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{2019} = \cos\frac{4038\pi}{7} + i\sin\frac{4038\pi}{7}$$

$$= \cos(576\pi + \frac{6\pi}{7}) + i\sin(576\pi + \frac{6\pi}{7}) = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}$$

ដូចនេះ $z^{2019} = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}$ ។

២.៥.ស្វ័យគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច(Powers of complex number)

គ្រប់ចំនួនពិត φ និង $r>0$ និង ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ n គេបាន ៖

$\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^{n}=r^{n}\left[\cos(n\varphi)+i.\sin(n\varphi)\right]$ ។

ឧទាហរណ៍១. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{7}}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{9}}$ ។

ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចបញ្ជាក់ម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចបញ្ជាក់ម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ z ៖

យើងមាន $z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{7}}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{9}}$

តាង $z_1=1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ នោះគេបាន $z=\dfrac{z_1{}^{7}}{z_2{}^{9}}$ $\quad(1)$

យើងមាន $z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រគេបាន ៖

$$z_1{}^{7}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{7}=2^{7}\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)\quad(2)$$

ម្យ៉ាងទៀត $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រគេបាន៖

$$z_2{}^{9}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{9}=2^{9}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)\quad(3)$$

យកទំនាក់ទំនង $(2)\&(3)$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$z=\frac{2^{7}}{2^{9}}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{3}-\frac{9\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}-\frac{9\pi}{4}\right)\right]$$

ដូចនេះ $z=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ហើយ ម៉ូឌុលនៃ z គឺ $r=|z|=\frac{1}{4}$ ។

និងអាគុយម៉ង់នៃ z គឺ $\theta=\arg(z)=\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍២. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ ។

ចូរសរសេរ z និង z^4 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ z និង z^4 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងមាន $z=1+\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$

$$=2\cos^2\frac{\pi}{9}+2i\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$

ដូចនេះ $z=2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន ៖

$$z^4=\left[2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right]=16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $z^4=16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៣. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{9}+i.\sin\frac{4\pi}{9}$ និង $w=\frac{z^4}{\left(1+z^3\right)^2}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $w=z$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $w=z$ ៖

គេអាចសរសេរ $w=\left(\frac{z^2}{1+z^3}\right)^2$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេមាន $z^2=(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9})^2=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}$

និង $z^3=(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9})^3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

គេបាន $w=\left(\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{1+\cos\frac{4\pi}{3}+i.\sin\frac{4\pi}{3}}\right)^2$

$$=\left(\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{2\cos^2\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$

$$=\left(\dfrac{1}{2\cos\frac{2\pi}{3}}.\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}+i.\sin\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$

$$=\left[-(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9})\right]^2=\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}=z$$

ដូចនេះ $w=z$ ។

ឧទាហរណ៍៨. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{2\pi}{9}+i.\sin\frac{2\pi}{9}$ ។ គណនា z^{2019} ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា z^{2019}

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ $z^{2019}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i.\sin\frac{2\pi}{9}\right)^{2019}=\cos\frac{4038\pi}{9}+i.\sin\frac{4038\pi}{9}$

ដោយ $\frac{4038\pi}{9}=\frac{1346\pi}{3}=448\pi+\frac{2\pi}{3}$

ដូចនេះ $z^{2019}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

២.៦.ឫសនៃចំនួនកុំផ្លិច (Complex roots)

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ដែល $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$

ឫសទី n នៃ z កំណត់ដោយ ៖

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$ ដែល $k = 0,1,2,...,(n-1)$ ។

ឧទាហរណ៍១. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 4\sqrt{2}(1+i)$ ។

ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនាឫសទីបីនៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z = 4\sqrt{2}(1+i) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

គណនាឫសទីបីនៃ z ៖

តាមរូបមន្តឫសទី n : $w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

ដោយគណណាឫសទីបីនោះ $n = 3$ ហើយគេមាន $r = 8$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $w_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi+8k\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+8k\pi}{12}\right)\right]$ ដែល $k = 0,1,2$ ។

.ចំពោះ $k = 0$ នោះ $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

.ចំពោះ $k = 1$ នោះ $w_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

.ចំពោះ $k = 2$ នោះ $w_2 = 2\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ។

ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនាឫសទីប្រាំនៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ ។

គណនាឫសទីប្រាំនៃ z ៖

តាមរូបមន្តឫសទី n : $w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

ដោយគណនាឫសទីប្រាំនោះ $n=5$ ហើយគេមាន $r=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ។

គេបាន $w_k=\cos\left(\dfrac{\pi+6k\pi}{15}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi+6k\pi}{15}\right)$ ដែល $k=0,1,2,3,4$ ។

.ចំពោះ $k=0$ នោះ $w_0=\cos\dfrac{\pi}{15}+i\sin\dfrac{\pi}{15}$ ។

.ចំពោះ $k=1$ នោះ $w_1=\cos\dfrac{7\pi}{15}+i\sin\dfrac{7\pi}{15}$ ។

.ចំពោះ $k=2$ នោះ $w_2=\cos\dfrac{13\pi}{15}+i\sin\dfrac{13\pi}{15}$ ។

.ចំពោះ $k=3$ នោះ $w_3=\cos\dfrac{19\pi}{15}+i\sin\dfrac{19\pi}{15}$ ។

.ចំពោះ $k=4$ នោះ $w_4=\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍៣. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=-1+i\sqrt{3}$ និង $b=3+\sqrt{3}i$

$a)$ ចូរសរសេរ $z=(a+b)(a^2+b^2)$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

$b)$ ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនាឫសទី5នៃ z ។

$c)$ ចូរសរសេរ a, b, ab និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

$a)$ សរសេរ $z=(a+b)(a^2+b^2)$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $z=\left(-1+i\sqrt{3}+3+i\sqrt{3}\right)\left[\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(3+i\sqrt{3}\right)^2\right]$

$$=\left(2+2i\sqrt{3}\right)\left(1-2i\sqrt{3}-3+9+6i\sqrt{3}-3\right)$$

$$=\left(2+2i\sqrt{3}\right)\left(4+4i\sqrt{3}\right)=8\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$$

$$=8\left(1+2i\sqrt{3}-3\right)=8\left(-2+2i\sqrt{3}\right)=-16+16i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $z=-16+16i\sqrt{3}$ ។

$b)$ សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនាឫសទី5នៃ z

យើងមាន $z=-16+16i\sqrt{3}=32\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=32\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $z=32\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

តាមរូបមន្តឫសទី $n: w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

ដោយ $r=32$, $n=5$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$ យើងបាន៖

យើងបាន $w_k = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi+6k\pi}{15}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+6k\pi}{15}\right)\right]$ ដែល $k=0,1,2,3,4$

ចំពោះ $k=0 : w_0 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=1 : w_1 = 2\left(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=2 : w_2 = 2\left(\cos\frac{14\pi}{15}+i\sin\frac{14\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=3 : w_3 = 2\left(\cos\frac{20\pi}{15}+i\sin\frac{20\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=4 : w_4 = 2\left(\cos\frac{26\pi}{15}+i\sin\frac{26\pi}{15}\right)$

$c)$ សរសេរ a, b, ab និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $a=-1+i\sqrt{3}$ និង $b=3+\sqrt{3}i$

យើងបាន $a=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$b=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ហើយ $ab=4\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=4\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

និង $\frac{a}{b}=\frac{2}{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០២

លំហាត់ជ្រើសរើសមានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $z = a + ib$ ដែល $a,b \in \mathbb{R}$:

ក) $z = 2(1+i) + 3(1-2i)$

ខ) $z = 3(2+i) - 2(2-i)$

គ) $z = 4(1+2i) + 3(1-2i)$

ឃ) $z = (1+i)(2+3i)$

ង) $z = (2-i)(1+3i)$

ច) $z = (1-i)(3-2i)$

ឆ) $z = 2(1+i) - i(1-i)$

ជ) $z = 3(2-i) + i(2+i)$

ឈ) $z = 4(1+2i) - 3i(1-2i)$

ញ) $z = (2-i)^2$

ដ) $z = (1-3i)^2$

ឋ) $z = (7+3i)^2$

ឌ) $z = (2+i)^3$

ឍ) $z = (1-2i)^3$ ណ) $z = (1+i)^3$

ត) $z = (1+i)(1+2i)(1+3i)$

ថ) $z = (1-i)(2+i)(3-2i)$

ទ) $z = (2+i)(1+2i)^2$

ធ) $z = \dfrac{1+3i}{2+i}$

ន) $z = \dfrac{9+7i}{3-2i}$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $z = a + ib$ ដែល $a,b \in \mathbb{R}$:

ក) $z = 2(1+i) + 3(1-2i) = 2 + 2i + 3 - 6i = 5 - 4i$

ខ) $z = 3(2+i) - 2(2-i) = 6 + 3i - 4 + 2i = 2 + 5i$

គ) $z=4(1+2i)+3(1-2i)=4+8i+3-6i=7+2i$

ឃ) $z=(1+i)(2+3i)=2+3i+2i+3i^2=2+5i-3=-1+5i$

ង) $z=(2-i)(1+3i)=2+6i-i-3i^2=2+5i+3=5+5i$

ច) $z=(1-i)(3-2i)=3-2i-3i+2i^2=3-5i-2=1-5i$

ឆ) $z=2(1+i)-i(1-i)=2+2i-i+i^2=2+i-1=1+i$

ជ) $z=3(2-i)+i(2+i)=6-3i+2i+i^2=6-i-1=5-i$

ឈ) $z=4(1+2i)-3i(1-2\mathrm{i})=4+8i-3i+6i^2=4+5i-6=-2+5i$

ញ) $z=(2-i)^2=4-4i+i^2=4-4i-1=3-4i$

ដ) $z=(1-3i)^2=1-6i+9i^2=1-6i-9=-8-6i$

ឋ) $z=(7+3i)^2=49+42i+9i^2=49+42i-9=40+42i$

ឌ) $z=(2+i)^3=8+12i+6i^2+i^3=8+12i-6-i=2+11i$

ឍ) $z=(1-2i)^3=1-6i+12i^2-8i^3=1-6i-12+8i=-11+2i$

ណ) $z=(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$

ត) $z=(1+i)(1+2i)(1+3i)=(1+2i+i+2i^2)(1+3i)=(-1+3i)(1+3i)=-10$

ថ) $z=(1-i)(2+i)(3-2i)=(2+i-2i-i^2)(3-2i)=(3-i)(3-2i)$

$=9-6i-3i+2i^2=7-9i$

ទ) $z=(2+i)(1+2i)^2=(2+i)(1+4i+4i^2)=(2+i)(-3+4i)$

$=-6+8i-3i+4i^2=-10+5i$

ធ) $z=\dfrac{1+3i}{2+i}=\dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i+6i-3i^2}{4-i^2}=\dfrac{5+5i}{5}=1+i$

ន) $z=\dfrac{9+7i}{3-2i}=\dfrac{(9+7i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{27+18i+21i+14i^2}{9-4i^2}=\dfrac{13+39i}{13}=1+3i$ ។

លំហាត់ទី០២

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=2(x+1)+i(y-3)$ និង $w=3(4-x)+i(5-y)$

ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ។ កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z=w$

យើងមាន $z=2(x+1)+i(y-3)$ និង $w=3(4-x)+i(5-y)$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$

យើងបាន $z=w$ សមមូល $2(x+1)+i(y-3)=3(4-x)+i(5-y)$

គេទាញបាន $\begin{cases}2(x+1)=3(4-x)\\ y-3=5-y\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}2x+2=12-3x\\ 2y=8\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x=\dfrac{10}{5}=2\\ y=\dfrac{8}{2}=4\end{cases}$

ដូចនេះ $x=2$ និង $y=4$ ។

លំហាត់ទី០៣

កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក) $z=3(x-2)+i(2y+1)$ និង $w=(2x-3)+3i(y-1)$ ។

ខ) $z=2(x+y)+i(x-y)$ និង $w=2(4+3i)$ ។

គ) $z=(2x+3y)+i(x+2y)$ និង $w=\dfrac{3+11i}{2+3i}$ ។

ឃ) $z=3(x+y-1)+i(2x+y-3)$ និង $w=2(x+1)+i(3x-4y)$ ។

ង) $z=(x+i)(1+iy)$ និង $w=\dfrac{7+11i}{4-i}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z=w$

ក) $z=3(x-2)+i(2y+1)$ និង $w=(2x-3)+3i(y-1)$

យើងបាន $3(x-2)+i(2y+1)=(2x-3)+3i(y-1)$ សមមូល $\begin{cases}3(x-2)=2x-3\\2y+1=3(y-1)\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}3x-6=2x-3\\2y+1=3y-3\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$

ដូចនេះ $x=3$, $y=4$ ។

ខ) $z=2(x+y)+i(x-y)$ និង $w=2(4+3i)$

យើងបាន $2(x+y)+i(x-y)=2(4+3i)$ សមមូល $\begin{cases}x+y=4 & (1)\\x-y=6 & (2)\end{cases}$

បូកសមីការ(1) និង(2) យើងបាន $2x=10$ នោះ $x=5$ យកជំនួសក្នុង(1)
គេបាន $5+y=4$ នោះ $y=-1$

ដូចនេះ $x=5$, $y=-1$ ។

គ) $z=(2x+3y)+i(x+2y)$ និង $w=\dfrac{3+11i}{2+3i}$

គេមាន $w=\dfrac{3+11i}{2+3i}=\dfrac{(3+11i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{6-9i+22i-33i^2}{4-9i^2}=\dfrac{39+13i}{13}=3+i$

យើងបាន $(2x+3y)+i(x+2y)=3+i$ សមមូល $\begin{cases}2x+3y=3 & (1)\\x+2y=1 & (2)\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}-2x-3y=-3 & (1)\\2x+4y=2 & (2)\end{cases}$

បូកសមីការ(1) និង(2) យើងបាន $y=-1$ យកជួសក្នុង(2) យើងបាន $x-2=1$
នោះគេទាញបាន $x=3$ ។ ដូចនេះ $x=3$, $y=-1$ ។

ឃ) $z=3(x+y-1)+i(2x+y-3)$ និង $w=2(x+1)+i(3x-4y)$

យើងបាន $3(x+y-1)+i(2x+y-3)=2(x+1)+i(3x-4y)$

សមមូល $\begin{cases}3(x+y-1)=2(x+1)\\2x+y-3=3x-4y\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}x+3y=5 & (1)\\-x+5y=3 & (2)\end{cases}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $8y=8$ នោះ $y=1$ យកជួសក្នុង(1) គេបាន $x+3=5$ នោះ $x=2$ ។ដូចនេះ $x=2$, $y=1$ ។

ង) $z=(x+i)(1+iy)$ និង $w=\dfrac{7+11i}{4-i}$

យើងមាន $z=(x+i)(1+iy)=x+ixy+i+i^2y=(x-y)+i(xy+1)$

ហើយ $w=\dfrac{7+11i}{4-i}=\dfrac{(7+11i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\dfrac{28+7i+44i+11i^2}{16-i^2}=\dfrac{17+51i}{17}=1+3i$

យើងបាន $(x-y)+i(xy+1)=1+3i$ សមមូល $\begin{cases}x-y=1\\xy+1=3\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}y=x-1 & (1)\\xy-2=0 & (2)\end{cases}$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុង(2)គេបាន $x(x-1)-2=0$ ឬ $x^2-x-2=0$ នោះគេទាញ $x_1=-1$, $x_2=2$ ។

ចំពោះ $x=-1$ តាម(1) គេទាញបាន $y=-1-1=-2$ ហើយចំពោះ $x=2$ តាម(2) គេទាញបាន $y=2-1=1$ ។

ដូចនេះ $x=-1$, $y=-2$ ឬ $x=2$, $y=1$ ។

លំហាត់ទី០៤

ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម ៖

ក) $2(a+ib)+3(a-ib)=10-3i$

ខ) $(3+2i)a+(1-3i)b=7+12i$

គ) $(1+i)(a+ib)+(3+2i)(a-ib)=14+5i$

ឃ) $3(a+ib)+2i(a-ib)=8+7i$

ង) $\frac{a+ib}{1+i}+\frac{a-ib}{3+i}=\frac{2(3-i)}{2+i}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម ៖

ក) $2(a+ib)+3(a-ib)=10-3i$

សមមូល $2a+2ib+3a-3ib=10-3i$ សមមូល $5a-ib=10-3i$ នោះគេទាញ

$\begin{cases}5a=10\\-b=-3\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

ដូចនេះ $a=2\ ,\ b=3$ ។

ខ) $(3+2i)a+(1-3i)b=7+12i$

សមមូល $3a+2ia+b-3ib=7+12i$ សមមូល $(3a+b)+i(2a-3b)=7+12i$

គេទាញ $\begin{cases}3a+b=7\\2a-3b=12\end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=3\ ,\ b=-2$ ។

គ) $(1+i)(a+ib)+(3+2i)(a-ib)=14+5i$

សមមូល $a+ib+ia-b+3a-3ib+2ia+2b=14+5i$ សមមូល
$(4a+b)+i(3a-2b)=14+5i$

គេទាញបាន $\begin{cases}4a+b=14\\3a-2b=5\end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=3\ ,\ b=2$ ។

ឃ) $3(a+ib)+2i(a-ib)=8+7i$

សមមូល $3a+3ib+2ia+2b=8+7i$ សមមូល $(3a+2b)+i(2a+3b)=8+7i$

គេទាញ $\begin{cases}3a+2b=8\\2a+3b=7\end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=2\ ,\ b=1$ ។

ង) $\dfrac{a+ib}{1+i}+\dfrac{a-ib}{3+i}=\dfrac{2(3-i)}{2+i}$

សមមូល $\dfrac{(a+ib)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+\dfrac{(a-ib)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{2(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

សមមូល $\dfrac{a-ia+ib+b}{2}+\dfrac{3a-ia-3ib-b}{10}=\dfrac{12-6i-4i-2}{5}$

សមមូល $5a-5ia+5ib+5b+3a-ia-3ib-b=20-20i$ សមមូល $(8a+4b)+i(-6a+8b)=20-20i$

គេទាញបាន $\begin{cases}8a+4b=20\\-6a+2b=-20\end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=3\ ,\ b=-1$ ។

លំហាត់ទី០៥

គេឲ្យសមីការ (E): $z^2+mz+n=0$ ដែល $m,n\in\mathbb{R}$ ។ កំណត់តម្លៃ m និង n ដោយដឹងថា $z_1=2+i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) រួចគណនាឫស z_2 មួយទៀត ចំពោះតម្លៃ m និង n ទើបរកឃើញខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ m និង n

ដើម្បីឲ្យ $z_1=2+i$ ជាឫសមីការ (E) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ។

គេបាន $(2+i)^2+m(2+i)+n=0$

$$4+4i-1+2m+mi+n=0$$
$$(3+2m+n)+i(4+m)=0$$

គេទាញបាន $\begin{cases}3+2m+n=0\\4+m=0\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}m=-4\\n=-2m-3=8-3=5\end{cases}$

ដូចនេះ $m=-4$, $n=5$ ។

គណនាឫស z_2 ៖

តាមទ្រឹស្តីបទវៀតអនុវត្តន៍ក្នុងសមីការ (E) គេបាន $z_1+z_2=-m=4$
នោះគេទាញ $z_2=4-z_1=4-(2+i)=2-i$ ។

ដូចនេះឫស z_2 មួយទៀតរបស់សមីការគឺ $z_2=2-i$ ។

លំហាត់ទី០៦

គេឲ្យសមីការ (E): $z^2+mz+n=0$ ដែល $m,n\in\mathbb{R}$ ។ កំណត់តម្លៃ m និង n ដោយដឹងថា $z_1=3-2i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) រួចរកឫស z_2 មួយទៀតចំពោះតម្លៃ m និង n ទើបរកឃើញខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ m និង n

ដើម្បីឲ្យ $z_1=3-2i$ ជាឫសមីការ (E) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(E) ។

គេបាន $(3-2i)^2+m(3-2i)+n=0$

$$9-12i-4+3m-2im+n=0$$
$$(5+3m+n)+i(-12-2m)=0$$

គេទាញបាន $\begin{cases}5+3m+n=0\\-12-2m=0\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}m=-6\\n=-3m-5=18-5=13\end{cases}$

ដូចនេះ $m=-6$, $n=13$ ។

គណនាឫស z_2 ៖

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតអនុវត្តន៍ក្នុងសមីការ (E) គេបាន $z_1+z_2=-m=6$

នោះគេទាញ $z_2=6-z_1=6-(3-2i)=3+2i$ ។

ដូចនេះឫស z_2 មួយទៀតរបស់សមីការគឺ $z_2=3+2i$ ។

<u>លំហាត់ទី០៧</u>

ចូរដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរខាងក្រោមនេះក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ៖

ក) $z^2-2z+5=0$

ខ) $z^2+4z+13=0$

គ) $z^2-6z+10=0$

ឃ) $z^2-4z+5=0$

ង) $z^2-8z+25=0$

ច) $z^2+10z+41=0$

ឆ) $2z^2-6z+5=0$

ជ) $4z^2-4z+17=0$

ឈ) $4z^2+12z+25=0$

ញ) $9z^2-6z+10=0$

ដ) $9z^2-42z+50=0$

ឋ) $25z^2-10z+37=0$

ឌ) $z^2-2(1+3i)z+1+6i=0$

ឍ) $z^2-(3+2i)z+1+3i=0$

ណ) $z^2-2iz+8=0$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរខាងក្រោមនេះក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ៖

ក) $z^2-2z+5=0$

គេមាន $\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (1)(5) = 1 - 5 = -4 = 4i^2$

នោះគេទាញឫស $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 - 2i \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 + 2i \end{cases}$

ដូចនេះ $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ ។

ខ) $z^2 + 4z + 13 = 0$

គេមាន $\Delta' = b'^2 - ac = (4)^2 - (1)(13) = 4 - 13 = -9 = 9i^2$

នោះគេទាញឫស $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -2 - 3i \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = -2 + 3i \end{cases}$

ដូចនេះ $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = -2 + 3i$ ។

គ) $z^2 - 6z + 10 = 0$

គេមាន $\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - (1)(10) = 9 - 10 = -1 = i^2$

នោះគេទាញឫស $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 3 - i \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 3 + i \end{cases}$

ដូចនេះ $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 3 + i$ ។

ឃ) $z^2 - 4z + 5 = 0$

គេមាន $\Delta' = b'^2 - ac = (4)^2 - (1)(5) = 4 - 5 = -1 = i^2$ នោះគេទាញឫស

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 - i \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 + i \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2 + i$ ។

ង) $z^2 - 8z + 25 = 0$

គេមាន $\Delta' = b'^2 - ac = (-4)^2 - (1)(25) = 16 - 25 = -9 = 9i^2$ នោះគេទាញឫស

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 4 - 3i \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 4 + 3i \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 4 + 3i$ ។

ច) $z^2 + 10z + 41 = 0$

មាន $\Delta' = b'^2 - ac = (5)^2 - (1)(41) = 25 - 41 = -16 = 16i^2$ នោះគេទាញឫស

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = -5 - 4i \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = -5 + 4i \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $z_1 = -5 - 4i$, $z_2 = -5 + 4i$ ។

ឆ) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ មាន $\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - (2)(5) = 9 - 10 = -1 = i^2$

នោះគេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{3 - i}{2} \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{3 + i}{2} \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1=\frac{3}{2}-i\frac{1}{2}$, $z_2=\frac{3}{2}+i\frac{1}{2}$ ។

ជ) $4z^2-4z+17=0$ មាន $\Delta'=b'^2-ac=(-2)^2-(4)(17)=4-68=-64=64i^2$

នោះគេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{2-8i}{4}=\frac{1}{2}-2i \\ z_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{2+8i}{4}=\frac{1}{2}+2i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1=\frac{1}{2}-2i$, $z_2=\frac{1}{2}+2i$ ។

ឈ) $4z^2+12z+25=0$

គេមាន $\Delta'=b'^2-ac=(6)^2-(4)(25)=36-100=-64=64i^2$

នោះគេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-6-8i}{4}=-\frac{3}{2}-2i \\ z_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-6+8i}{4}=-\frac{3}{2}+2i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1=-\frac{3}{2}-2i$, $z_2=-\frac{3}{2}+2i$ ។

ញ) $9z^2-6z+10=0$

មាន $\Delta'=b'^2-ac=(-3)^2-(9)(10)=9-90=-81=81i^2$ នោះគេទាញឫស

$$\left[\begin{array}{l} z_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{3-9i}{9} \\ z_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{3+9i}{9} \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $z_1=\frac{1}{3}-i$, $z_2=\frac{1}{3}+i$ ។

ដ) $9z^2-42z+50=0$

មាន $\Delta' = b'^2 - ac = (-21)^2 - (9)(50) = 441 - 450 = -9 = 9i^2$ នោះគេទាញឫស

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{21 - 3i}{9} \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{21 + 3i}{9} \end{cases}$$

ដូចនេះ $z_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}i$, $z_2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}i$ ។

ឋ) $25z^2 - 10z + 37 = 0$

មាន $\Delta' = b'^2 - ac = (-5)^2 - (25)(37) = -900 = 900i^2$ នោះគេទាញឫស

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{5 - 30i}{25} \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{5 + 30i}{25} \end{cases}$$

ដូចនេះ $z_1 = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}i$, $z_2 = \frac{1}{5} + \frac{6}{5}i$ ។

ឌ) $z^2 - 2(1 + 3i)z + 1 + 6i = 0$

មាន $\Delta' = b'^2 - ac = (1 + 3i)^2 - (1 + 6i) = 9i^2$ នោះគេទាញឫស

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 + 3i - 3i = 1 \\ z_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 1 + 3i + 3i = 1 + 6i \end{cases}$$

ដូចនេះ $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + 6i$ ។

ឍ) $z^2 - (3 + 2i)z + 1 + 3i = 0$

$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(1 + 3i) = 9 + 12i - 4 - 4 - 12i = 1$

នោះគេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{3+2i-1}{2} = 1+i \\ z_2 = \dfrac{3+2i+1}{2} = 2+i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+i$ ។

ឍ) $z^2 - 2iz + 8 = 0$

$\Delta' = (-i)^2 - 8 = -9 = 9i^2$ នោះគេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1 = i - 3i = -2i \\ z_2 = i + 3i = 4i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1 = -2i$, $z_2 = 4i$ ។

លំហាត់ទី០៨

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ៖

(ដែល z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច) ។

ក) $\begin{cases} z_1 + iz_2 = -1+2i \\ iz_1 - 2z_2 = -3-4i \end{cases}$

ខ) $\begin{cases} (1+i)z_1 + 2z_2 = 6-2i \\ (3+2i)z_1 + z_2 = 4+3i \end{cases}$

គ) $\begin{cases} 2z_1 + (3-i)z_2 = 2(5-i) \\ 3z_1 + (1+i)z_2 = 7+8i \end{cases}$

ឃ) $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 10+7i \\ (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 2(4+i) \end{cases}$

ង) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (3-2i)z_2 = 10(1+i) \\ (1+2i)z_1 + (1-3i)z_2 = 5(2+i) \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច៖

(ដែល z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច)។

ក) $\begin{cases} z_1 + iz_2 = -1+2i \\ iz_1 - 2z_2 = -3-4i \end{cases}$

គណនា $D=\begin{vmatrix}1 & i\\ i & -2\end{vmatrix}=-2-i^2=-1$

$$D_{z_1}=\begin{vmatrix}-1+2i & i\\ -3-4i & -2\end{vmatrix}=2-4i+3i-4=-2-i$$

$$D_{z_2}=\begin{vmatrix}1 & -1+2i\\ i & -3-4i\end{vmatrix}=-3-4i+i+2=-1-3i$$

ដូចនេះ: $z_1=\dfrac{D_{z_1}}{D}=2+i\ ,\ z_2=\dfrac{D_{z_2}}{D}=1+3i$ ។

ខ) $\begin{cases}(1+i)z_1+2z_2=6-2i\\ (3+2i)z_1+z_2=4+3i\end{cases}$

គណនា $D=\begin{vmatrix}1+i & 2\\ 3+2i & 1\end{vmatrix}=1+i-6-4i=-5-3i$

$$D_{z_1}=\begin{vmatrix}6-2i & 2\\ 4+3i & 1\end{vmatrix}=6-2i-8-6i=-2-8i$$

$$D_{z_2}=\begin{vmatrix}1+1 & 6-2i\\ 3+2i & 4+3i\end{vmatrix}=(1+i)(4+3i)-(3+2i)(6-2i)=4+3i+4i-3-18+6i-12i-4$$

ដូចនេះ: $z_1=\dfrac{D_{z_1}}{D}=\dfrac{-2-8i}{-5-3i}=1+i\ ,\ z_2=\dfrac{D_{z_2}}{D}=\dfrac{-21+i}{-5-3i}=3-2i$ ។

គ) $\begin{cases}2z_1+(3-i)z_2=2(5-i)\\ 3z_1+(1+i)z_2=7+8i\end{cases}$

គណនា $D=\begin{vmatrix}2 & 3-i\\ 3 & 1+i\end{vmatrix}=2+2i-9+3i=-7+5i$

$$D_{z_1}=\begin{vmatrix}2(5-i) & 3-i\\ 7+8i & 1+i\end{vmatrix}=2(5-i)(1+i)-(3-i)(7+8i)$$

$$D_{z_1}=10+10i-2i+2-21-24i+7i-8=-17-9i$$

$$D_{z_2}=\begin{vmatrix} 2 & 2(5-i) \\ 3 & 7+8i \end{vmatrix}=14+16i-30+6i=-16+22i$$

ដូចនេះ $z_1=\frac{D_{z_1}}{D}=\frac{-17-9i}{-7+5i}=1+2i$, $z_2=\frac{D_{z_2}}{D}=\frac{-16+22i}{-7+5i}=3-i$ ។

ឃ) $\begin{cases} 2z_1+3z_2=10+7i \\ (1+i)z_1+(1-i)z_2=2(4+i) \end{cases}$

គណនា $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1+i & 1-i \end{vmatrix}=2-2i-3-3i=-1-5i$

$$D_{z_1}=\begin{vmatrix} 10+7i & 3 \\ 2(4+i) & 1-i \end{vmatrix}=10-10i+7i+7-24-6i=-7-9i$$

$$D_{z_2}=\begin{vmatrix} 2 & 10+7i \\ 1+i & 2(4+i) \end{vmatrix}=16+4i-10-7i-10i+7=13-13i$$

ដូចនេះ $z_1=\frac{D_{z_1}}{D}=\frac{-7-9i}{-1-5i}=2-i$, $z_2=\frac{D_{z_2}}{D}=\frac{13-13i}{-1-5i}=2+3i$ ។

ង) $\begin{cases} (1+i)z_1+(3-2i)z_2=10(1+i) \\ (1+2i)z_1+(1-3i)z_2=5(2+i) \end{cases}$

គណនា

$$D=\begin{vmatrix} 1+i & 3-2i \\ 1+2i & 1-3i \end{vmatrix}=(1+i)(1-3i)-(1+2i)(3-2i)=4-2i-7-4i=-3-6i$$

$$D_{z_1}=\begin{vmatrix} 10(1+i) & 3-2i \\ 5(2+i) & 1-3i \end{vmatrix}=10(1+i)(1-3i)-5(2+i)(3-2i)$$

$$=40-20i-40+5i=-15i$$

$$D_{z_2}=\begin{vmatrix} 1+i & 10(1+i) \\ 1+2i & 5(2+i) \end{vmatrix}=5(1+i)(2+i)-10(1+i)(1+2i)=15-15i$$

ដូចនេះ $z_1=\frac{D_{z_1}}{D}=\frac{-15i}{-3-6i}=2+i$, $z_2=\frac{D_{z_2}}{D}=\frac{15-15i}{-3-6i}=1+3i$ ។

លំហាត់ទី០៩

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = 2 + i$ និង $y = 1 - 3i$ ។ ចូរសរសេរ $z = x^2 + xy + y^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ $z = x^2 + xy + y^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $x = 2 + i$ និង $y = 1 - 3i$

យើងបាន $z = (2+i)^2 + (2+i)(1-3i) + (1-3i)^2$

$= 4 + 4i - 1 + 2 - 6i + i + 3 + 1 - 6i - 9 = -7i$

ដូចនេះ $z = -7i$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = 3 + 2i$ និង $y = 1 + 3i$ ។ ចូរសរសេរ $z = x^2 - xy + y^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ $z = x^2 - xy + y^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $x = 3 + 2i$ និង $y = 1 + 3i$

យើងបាន $z = (3+2i)^2 - (3+2i)(1+3i) + (1-3i)^2$

$= 9 + 12i - 4 - 3 - 9i - 2i + 6 + 1 - 6i - 9 = -5i$

ដូចនេះ $z = -5i$ ។

លំហាត់ទី១១

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a=1+i$, $b=1+2i$ និង $c=1+3i$ ។

ក)ចូរសរសេរ $u=a+b+c$, $v=ab+bc+ac$ និង $w=abc$

ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)កំណត់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=u^2+v^2+w^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ $u=a+b+c$, $v=ab+bc+ac$ **និង** $w=abc$ **ជាទម្រង់ពីជគណិត**

យើងបាន $u=(1+i)+(1+2i)+(1+3i)=3+6i$

$$v=(1+i)(1+2i)+(1+2i)(1+3i)+(1+i)(1+3i)$$

$$=-1+3i-5+5i-2+4i=-8+12i$$

$$w=(1+i)(1+2i)(1+3i)=(1+2i+i-2)(1+3i)=-1+9i^2=-10$$

ដូចនេះ $u=3+6i$, $v=-8+12i$, $w=-10$ ។

ខ)កំណត់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=u^2+v^2+w^2$

យើងបាន $z=(3+6i)^2+(-8+12i)^2+(-10)^2$

$$=9+36i-36+64-192i-144+100$$

ដូចនេះ $z=-7-156i$ ហើយផ្នែកពិត $\text{Re}(z)=-7$ និងផ្នែកនិម្មិត $\text{Im}(z)=-156$

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): z^2-(3-2i)z+5(1-i)=0$ ។

ក)ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-15+8i=(1+4i)^2$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ(E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយសរសេរឫស z_1 និង z_2

ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ក)ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-15+8i=(1+4i)^2$

យើងមាន $(1+4i)^2=1+8i-16=-15+8i$

ដូចនេះ $-15+8i=(1+4i)^2$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ(E) ដោយសរសេរឫស z_1 និង z_2ជាទម្រង់ពីជគណិត

$(E): z^2-(3-2i)z+5(1-i)=0$

យើងមាន $\Delta=(3-2i)^2-20(1-i)=9-12i-4-20+20i=-15+8i=(1+4i)^2$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{3-2i-1-4i}{2}=1-3i \\ z_2=\dfrac{3-2i+1+4i}{2}=2+i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1=1-3i$, $z_2=2+i$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): z^2-(5+3i)z+4+7i=0$ ។

ក)ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $2i=(1+i)^2$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ(E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយសរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ក)ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $2i=(1+i)^2$

យើងមាន $(1+i)^2=1+2i-1=2i$

ដូចនេះ $2i=(1+i)^2$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ(E) ដោយសរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

$(E): z^2-(5+3i)z+4+7i=0$

យើងមាន $\Delta=(5+3i)^2-4(4+7i)=25+30i-9-16-28i=2i=(1+i)^2$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{5+3i-1-i}{2}=2+i \\ z_2=\dfrac{5+3i+1+i}{2}=3+2i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1=2+i$, $z_2=3+2i$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): (2+i)z^2-(2+11i)z-7+9i=0$ ។

ក) ដោះស្រាយសមីការ(E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយសរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ)ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $z_1^2-z_1z_2+z_2^2=-4+9i$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ដោះស្រាយសមីការ(E) ដោយសរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

$(E): (2+i)z^2-(2+11i)z-7+9i=0$

យើងមាន $\Delta=(2+11i)^2-4(2+i)(-7+9i)^2$

$$=4+44i-121+56-72i+28i+36$$
$$=-25=25i$$

គេទាញឫស $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2+11i-5i}{2(2+i)} = \dfrac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+6i+3}{5} = 1+i \\ z_2 = \dfrac{2+11i+5i}{2(2+i)} = \dfrac{(1+8i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i+16i+8}{5} = 2+3i \end{cases}$

ដូចនេះ $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+3i$ ។

ខ)ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2 = -4+9i$

យើងបាន $z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2 = (1+i)^2 - (1+i)(2+3i) + (2+3i)^2$

$= 1+2i-1-2-3i-2i+3+4+12i-9$

ដូចនេះ $z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2 = -4+9i$ ។

លំហាត់ទី១៥

ចូរគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក) $z = 3+4i$ ខ) $z = 8+6i$

គ) $z = -5+12i$ ឃ) $z = 48-14i$

ង) $z = -24-10i$ ច) $z = -8-6i$

ឆ) $z = -5-12i$ ជ) $z = 35-12i$

ឈ) $z = 40+42i$ ញ) $z = 16-30i$

ដ) $z = -12+16i$ ឌ) $z = 45+28i$

ឍ) $z = 33-56i$ ណ) $z = -32-126i$

ដំណោះស្រាយ

គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក) $z = 3+4i$

តាង $w_k = x + iy \; , x, y \in \mathbb{R}$ ជាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 3 + 4i$ នោះគេបាន

$w_k^{\;2} = z$ ឬ $(x+iy)^2 = 3 + 4i$

សមមូល $(x^2 - y^2) + i(2xy) = 3 + 4i$ នោះគេទាញ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \quad (1) \\ y = \dfrac{2}{x} \qquad\quad (2) \end{cases}$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3$ ឬ $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

សមមូល $(x^2+1)(x^2-4) = 0$ នោះគេទាញ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array}\right.$

សមមូល $x_1 = -2 \; , x_2 = 2$ ព្រោះ $x^2 + 1 = 0$ គ្មានឫស។

ចំពោះ $x_1 = -2$ នោះ $y_1 = \dfrac{2}{x_1} = -1$ ហើយ $x_2 = 2$ នោះ $y_2 = \dfrac{2}{x_2} = 1$ ។

ដូចនេះ $w_1 = -2 - i \; , \; w_2 = 2 + i$ ជាឫសការេនៃ $z = 3 + 4i$ ។

ខ) $z = 8 + 6i$

តាង $w_k = x + iy \; , x, y \in \mathbb{R}$ ជាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 8 + 6i$ នោះគេបាន

$w_k^{\;2} = z$ ឬ $(x+iy)^2 = 8 + 6i$

សមមូល $(x^2 - y^2) + i(2xy) = 8 + 6i$ នោះគេទាញ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \quad (1) \\ y = \dfrac{3}{x} \qquad\quad (2) \end{cases}$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $x^2 - \dfrac{9}{x^2} = 8$ ឬ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

សមមូល $(x^2+1)(x^2-9)=0$ នោះគេទាញ $\left[\begin{array}{l} x^2+1=0 \\ x^2-9=0 \end{array}\right.$

សមមូល $x_1=-3$, $x_2=3$ ព្រោះ $x^2+1=0$ គ្មានឫស។

ចំពោះ $x_1=-3$ នោះ $y_1=\dfrac{3}{x_1}=-1$ ហើយ $x_2=3$ នោះ $y_2=\dfrac{3}{x_2}=1$ ។

ដូចនេះ $w_1=-3-i$, $w_2=3+i$ ជាឫសការេនៃ $z=8+6i$ ។

គ) $z=-5+12i$

តាង $w_k=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ ជាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=-5+12i$ នោះគេបាន

${w_k}^2=z$ ឬ $(x+iy)^2=-5+12i$

សមមូល $(x^2-y^2)+i(2xy)=-5+12i$ នោះគេទាញ $\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=12 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x^2-y^2=-5 & (1) \\ y=\dfrac{6}{x} & (2) \end{cases}$

យកសមីការ (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $x^2-\dfrac{36}{x^2}=-5$ ឬ $x^4+5x^2-36=0$

សមមូល $(x^2+9)(x^2-4)=0$ នោះគេទាញ $\left[\begin{array}{l} x^2+9=0 \\ x^2-4=0 \end{array}\right.$ សមមូល

$x_1=-2$, $x_2=2$ ព្រោះ $x^2+9=0$ គ្មានឫស។

ចំពោះ $x_1=-2$ នោះ $y_1=\dfrac{6}{x_1}=-3$ ហើយ $x_2=2$ នោះ $y_2=\dfrac{6}{x_2}=3$ ។

ដូចនេះ $w_1=-2-3i$, $w_2=2+3i$ ជាឫសការេនៃ $z=-5+12i$ ។

ឃ) $z=48-14i$

តាង $w_k = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ ជាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 48 - 14i$ នោះគេបាន

${w_k}^2 = z$ ឬ $(x + iy)^2 = 48 - 14i$

សមមូល $(x^2 - y^2) + i(2xy) = 48 - 14i$ នោះគេទាញ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ 2xy = -14 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 & (1) \\ y = -\dfrac{7}{x} & (2) \end{cases}$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $x^2 - \dfrac{49}{x^2} = 48$ ឬ $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

សមមូល $(x^2 + 1)(x^2 - 49) = 0$ នោះគេទាញ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 49 = 0 \end{array}\right.$

សមមូល $x_1 = -7$, $x_2 = 7$ ។

ចំពោះ $x_1 = -7$ នោះ $y_1 = -\dfrac{7}{x_1} = 1$ ហើយ $x_2 = 7$ នោះ $y_2 = -\dfrac{7}{x_2} = -1$ ។

ដូចនេះ $w_1 = -7 + i$, $w_2 = 7 - i$ ជាឫសការេនៃ $z = 48 - 14i$ ។

ង) $z = -24 - 10i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 1 - 5i$ និង $w_2 = -1 + 5i$ ។

ច) $z = -8 - 6i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 1 - 3i$ និង $w_2 = -1 + 3i$ ។

ឆ) $z = -5 - 12i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 2 - 3i$ និង $w_2 = -2 + 3i$ ។

ជ) $z = 35 - 12i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 6 - i$ និង $w_2 = -6 + i$ ។

ឈ) $z = 40 + 42i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 7 + 3i$ និង $w_2 = -7 - 3i$ ។

ញ) $z = 16 - 30i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 5 - 3i$ និង $w_2 = -5 + 3i$ ។

ដ) $z = -12 + 16i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 2 + 4i$ និង $w_2 = -2 - 4i$ ។

ឌ) $z = 45 + 28i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 7 + 2i$ និង $w_2 = -7 - 2i$ ។

ឍ) $z = 33 - 56i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 7 - 4i$ និង $w_2 = -7 + 4i$ ។

ណ) $z = -32 - 126i$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $w_1 = 7 - 9i$ និង $w_2 = -7 + 9i$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 2 + i$ និង $b = 1 + 3i$ ។ គេយក $z = a^2 + b^2 - a + b + 1$ ។

ក)ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)គណនាឫសការេនៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $a=2+i$ និង $b=1+3i$

យើងបាន $z=a^2+b^2-a+b+1=(2+i)^2+(1+3i)^2-(2+i)+(1+3i)+1$

$=4+4i-1+1+6i-9-2-i+1+3i+1=-5+12i$ ។

ដូចនេះ $z=-5+12i$ ។

ខ)គណនាឫសការេនៃ z

តាង $w_k=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ ជាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=-5+12i$ នោះគេបាន $w_k{}^2=z$ ឬ $(x+iy)^2=-5+12i$

សមមូល $(x^2-y^2)+i(2xy)=-5+12i$ នោះគេទាញ $\begin{cases}x^2-y^2=-5\\2xy=12\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}x^2-y^2=-5 & (1)\\ y=\dfrac{6}{x} & (2)\end{cases}$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $x^2-\dfrac{36}{x^2}=-5$ ឬ $x^4+5x^2-36=0$

សមមូល $(x^2+9)(x^2-4)=0$ នោះគេទាញ $\left[\begin{array}{l}x^2+9=0\\x^2-4=0\end{array}\right.$

សមមូល $x_1=-2$, $x_2=2$ ព្រោះ $x^2+9=0$ គ្មានឫស

ចំពោះ $x_1=-2$ នោះ $y_1=\dfrac{6}{x_1}=-3$ ហើយ $x_2=2$ នោះ $y_2=\dfrac{6}{x_2}=3$ ។

ដូចនេះ $w_1=-2-3i$, $w_2=2+3i$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=3+2i$ និង $b=2-i$ ។ គេយក $z=a^2+b^2+a+2b$ ។

ក)ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)គណនាឫសការេនៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $a=3+2i$ និង $b=2-i$

យើងបាន $z=a^2+b^2+a+2b=(3+2i)^2+(2-i)^2+(3+2i)+2(2-i)$

$=9+12i-4+4-4i-1+3+2i+4-2i=15+8i$ ។

ដូចនេះ $z=15+8i$ ។

ខ)គណនាឫសការេនៃ z

តាង $w_k=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ ជាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=15+8i$ នោះគេបាន
$w_k{}^2=z$ ឬ $(x+iy)^2=15+8i$

សមមូល $(x^2-y^2)+i(2xy)=15+8i$ នោះគេទាញ $\begin{cases}x^2-y^2=15\\2xy=8\end{cases}$ ឬ

$$\begin{cases}x^2-y^2=15 & (1)\\ y=\dfrac{4}{x} & (2)\end{cases}$$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $x^2-\dfrac{16}{x^2}=15$ ឬ $x^4-15x^2-16=0$

សមមូល $(x^2+1)(x^2-16)=0$ នោះគេទាញ $\left[\begin{array}{l} x^2+1=0 \\ x^2-16=0 \end{array}\right.$

សមមូល $x_1=-4$, $x_2=4$ ។

ចំពោះ $x_1=-4$ នោះ $y_1=\frac{4}{x_1}=-1$ ហើយ $x_2=4$ នោះ $y_2=\frac{4}{x_2}=1$ ។

ដូចនេះ $w_1=-4-i$, $w_2=4+i$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=-7+24i$ និង $w=x+iy$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ។

ក)ចូរស្រាយថាបើ $w^4=z$ នោះគេបាន $(S):\begin{cases}(x^2-y^2)^2-4x^2y^2=-7\\ 4xy(x^2-y^2)=24\end{cases}$

ខ)ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ(S) ដោយប្រើអថេរជំនួយ $u=x^2-y^2$ និង $v=xy$

គ)ទាញរកឫសទីបួននៃចំនួនកុំផ្លិច z ។

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថាបើ $w^4=z$ នោះគេបាន $(S):\begin{cases}(x^2-y^2)^2-4x^2y^2=-7\\ 4xy(x^2-y^2)=24\end{cases}$

យើងមាន $z=-7+24i$ និង $w=x+iy$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$

ដោយ $w^4=z$ នោះ $(x+iy)^4=-7+24i$

សមមូល $\left(x^2-y^2+2ixy\right)^2=-7+24i$

សមមូល $\left(x^2-y^2\right)^2-4x^2y^2+4xy\left(x^2-y^2\right)i=-7+24i$

ដូចនេះ $(S):\begin{cases}(x^2-y^2)^2-4x^2y^2=-7\\ 4xy(x^2-y^2)=24\end{cases}$ ពិត។

ខ)ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ(S)

គេមាន $(S):\begin{cases}(x^2-y^2)^2-4x^2y^2=-7\\4xy(x^2-y^2)=24\end{cases}$

ដោយប្រើអថេរជំនួយ $u=x^2-y^2$ និង $v=xy$ នោះគេបាន $\begin{cases}u^2-4v^2=-7\\4uv=24\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}u^2-4v^2=-7 & (1)\\ v=\dfrac{6}{u} & (2)\end{cases}$

យក(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $u^2-\dfrac{144}{u^2}=-7$ ឬ $u^4+7u^2-144=0$

សមមូល $(u^2+16)(u^2-9)=0$ នោះគេទាញឫស $u_1=-3$, $u_2=3$ ព្រោះ $u^2+16=0$ គ្មានឫសក្នុង$\mathbb{R}$ ។

ចំពោះ $u_1=-3$ នោះ $v_1=\dfrac{6}{u_1}=\dfrac{6}{-3}=-2$ ហើយចំពោះ $u_2=3$ នោះ $v_2=\dfrac{6}{u_2}=2$

. ករណីទី១ $u_1=-3$ និង $v_1=-2$ គេបាន $\begin{cases}x^2-y^2=-3\\xy=-2\end{cases}$ ។

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $x_1=-1$, $y_1=2$ ឬ $x_2=1$, $y_2=-2$ ។

.ករណីទី២ $u_2=3$ និង $v_2=2$ គេបាន $\begin{cases}x^2-y^2=3\\xy=2\end{cases}$ ។

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $x_1=2$, $y_1=1$ ឬ $x_2=-2$, $y_2=-1$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានបួនគូចម្លើយ

$(x,y)\in\{(-1,2),(1,-2),(2,1),(-2,-1)\}$ ។

គ)ទាញរកឫសទីបួននៃចំនួនកុំផ្លិច z

តាង $w_k = x + iy$ ជាឫសទីបួននៃ z នោះគេបាន ${w_k}^4 = z = -7 + 24i$ ។

យោងតាមលទ្ធភាពនៃសម្រាយខាងលើយើងទាញបានឫសទីបួននៃ z គឺ ៖

$w_1 = -1 + 2i$, $w_2 = 1 - 2i$, $w_3 = 2 + i$, $w_4 = -2 - i$ ។

លំហាត់ទី១៩

ក)ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $(5+3i)^2 = 16 + 30i$ ។

ខ)ទាញរកឫសនៃសមីការ $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = 16 + 30i$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។

ដំណោះស្រាយ

ក)ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $(5+3i)^2 = 16 + 30i$

យើងមាន $(5+3i)^2 = 25 + 30i - 9 = 16 + 30i$ ។

ដូចនេះ $(5+3i)^2 = 16 + 30i$ ពិត។

ខ)ទាញរកឫសនៃសមីការ $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = 16 + 30i$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ៖

យើងបាន $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = (5+3i)^2$ សមមូល $\left[\begin{array}{ll} \frac{z-i}{z+i} = 5 + 3i & (1) \\ \frac{z-i}{z+i} = -5 - 3i & (2) \end{array}\right.$

តាម (1) គេបាន $z - i = (5+3i)(z+i)$ សមមូល $z - i = (5+3i)z + 5i - 3$

គេទាញ $z = \frac{3-6i}{4+3i} = \frac{(3-6i)(4-3i)}{25} = \frac{12 - 9i - 24i - 18}{25} = -\frac{6}{25} - i\frac{33}{25}$ ។

តាម (2) គេបាន $z - i = (-5-3i)(z+i)$ សមមូល $z - i = (-5-3i)z - 5i + 3$

គេទាញបាន $z=\frac{3-4i}{6+3i}=\frac{(3-4i)(6-3i)}{45}=\frac{18-9i-24i-12}{45}=\frac{2}{15}-\frac{11}{15}i$ ។

ដូចនេះ $z_1=-\frac{6}{25}-\frac{33}{25}i$; $z_2=\frac{2}{15}-\frac{11}{15}i$ ។

លំហាត់ទី២០

ចូរគណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមនេះ ៖

ក) $z=-4+3i$

ខ) $z=8-6i$

គ) $z=-5-12i$

ឃ) $z=48+14i$

ង) $z=-24+10i$

ច) $z=8-6i$

ឆ) $z=-5+12i$

ជ) $z=-35-12i$

ឈ) $z=-40-42i$

ញ) $z=-16+30i$

ដ) $z=-12-16i$

ឋ) $z=-45+28i$

ឍ) $z=33+56i$

ណ) $z=32-126i$

ដំណោះស្រាយ

គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមនេះ ៖

ក) $z=-4+3i$ តាមរូបមន្ត $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

យើងបាន $|z|=\sqrt{16+9}=5$ ។

ខ) $z=8-6i$ គេបាន $|z|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$ ។

គ) $z=-5-12i$ គេបាន $|z|=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$ ។

ឃ) $z=48+14i$ គេបាន $|z|=\sqrt{48^2+14^2}=\sqrt{2500}=50$ ។

ង) $z=-24+10i$ គេបាន $|z|=\sqrt{(-24)^2+10^2}=\sqrt{676}=26$ ។

ច) $z=8-6i$ គេបាន $|z|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$ ។

ឆ) $z=-5+12i$ គេបាន $|z|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$ ។

ជ) $z=-35-12i$ គេបាន

$|z|=\sqrt{(-35)^2+(-12)^2}=\sqrt{1225+144}=\sqrt{1369}=37$ ។

ឈ) $z=-40-42i$ គេបាន $|z|=\sqrt{(-40)^2+(-42)^2}=\sqrt{3364}=58$ ។

ញ) $z=-16+30i$ គេបាន $|z|=\sqrt{(-16)^2+30^2}=\sqrt{1156}=34$ ។

ដ) $z=-12-16i$ គេបាន $|z|=\sqrt{(-12)^2+(-16)^2}=\sqrt{400}=20$ ។

ឌ) $z=-45+28i$ គេបាន $|z|=\sqrt{(-45)^2+28^2}=\sqrt{2809}=53$ ។

ឍ) $z=33+56i$ គេបាន $|z|=\sqrt{33^2+56^2}=\sqrt{4225}=65$ ។

ណ) $z=32-126i$ គេបាន $|z|=\sqrt{32^2+(-126)^2}=\sqrt{16900}=130$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក) $|zw|=|z||w|$

ខ) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ ដែល $w\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) $|zw|=|z||w|$

តាង $z=x+iy$ និង $w=u+iv$ ដែល $x,y,u,v\in\mathbb{R}$

យើងមាន $zw=(x+iy)(u+iv)=(ux-vy)+i(vx+uy)$

យើងបាន

$$|zw|=\sqrt{(ux-vy)^2+(vx+uy)^2}=\sqrt{u^2x^2-2uvxy+v^2y^2+v^2x^2+2uvxy+u^2y^2}$$

$$|zw|=\sqrt{u^2(x^2+y^2)+v^2(x^2+y^2)}=\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{u^2+v^2}=|z||w|$$

ដូចនេះ $|zw|=|z||w|$ ។

ខ) $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$ ដែល $w\neq 0$

តាង $z=x+iy$ និង $w=u+iv$ ដែល $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ និង $u\neq 0,v\neq 0$

យើងមាន $\dfrac{z}{w}=\dfrac{x+iy}{u+iv}=\dfrac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)}=\dfrac{(ux+vy)+\mathrm{i}(uy-vx)}{u^2+v^2}$

យើងបាន

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\sqrt{\left(\frac{ux+vy}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{uy-vx}{u^2+v^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{u^2x^2+2uvxy+v^2y^2+u^2y^2-2uvxy+v^2x^2}}{u^2+v^2}$$

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{\sqrt{x^2(u^2+v^2)+y^2(u^2+v^2)}}{u^2+v^2}=\frac{\sqrt{u^2+v^2}\ \sqrt{x^2+y^2}}{u^2+v^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{|z|}{|w|}$$

ដូចនេះ: $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$ ។

លំហាត់ទី២២

ចូររកចំនួនកុំផ្លិច z ដោយដឹងថា $iz+|z|=1+3i$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនកុំផ្លិច z

គេមាន $iz+|z|=1+3i$ (1)

តាង $z=x+iy$ នោះ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$

សមីការ(1) អាចសរសេរជា $i(x+iy)+\sqrt{x^2+y^2}=1+3i$

សមមូល $(-y+\sqrt{x^2+y^2})+ix=1+3i$

គេទាញ $\begin{cases} x=3 & (2) \\ -y+\sqrt{x^2+y^2}=1 & (3) \end{cases}$

យក(2) ជំនួសក្នុង(3) គេបាន $-y+\sqrt{9+y^2}=1$

សមមូល $\sqrt{9+y^2}=1+y$ សមមូល $\begin{cases} 1+y\ge 0 \\ 9+y^2=(1+y)^2 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} y\ge -1 \\ 9+y^2=1+2y+y^2 \end{cases}$ នោះគេទាញ $\begin{cases} y\ge -1 \\ y=4 \end{cases}$ ឬ $y=4$ ។

ដូចនេះ $z=3+4i$ ។

លំហាត់ទី២៣

ចូររកចំនួនកុំផ្លិច z ដោយដឹងថា $i(1+z)+|z|=2+5i$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនកុំផ្លិច z ដោយដឹងថា $i(1+z)+|z|=2+5i$ (1)

តាង $z=x+iy$ នោះ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$

សមីការ(1) អាចសរសេរជា $i(1+x+iy)+\sqrt{x^2+y^2}=2+5i$

សមមូល $(-y+\sqrt{x^2+y^2})+i(1+x)=2+5i$

គេទាញ $\begin{cases} 1+x=5 \\ -y+\sqrt{x^2+y^2}=2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x=4 \\ \sqrt{16+y^2}=2+y \end{cases}$

សមីការ $\sqrt{16+y^2}=2+y$ សមមូល $\begin{cases} 2+y\ge 0 \\ 16+y^2=(2+y)^2 \end{cases}$

នោះគេទាញ $\begin{cases} y\ge -2 \\ y=3 \end{cases}$ ឬ $y=3$ ។ ដូចនេះ $z=4+3i$ ។

លំហាត់ទី២៤

ចូររកចំនួនកុំផ្លិច z ដោយដឹងថា $i(1-z)+|z+1|=1-i$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនកុំផ្លិច z ដោយដឹងថា $i(1-z)+|z+1|=1-i$ (1)

តាង $z=x+iy$ នោះ $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$

សមីការ(1) អាចសរសេរជា $i(1-x-iy)+\sqrt{(1+x)^2+y^2}=1-i$

សមមូល $[y+\sqrt{(1+x)^2+y^2}]+i(1-x)=1-i$

គេទាញបាន $\begin{cases}1-x=-1\\ y+\sqrt{(1+x)^2+y^2}=1\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x=2\\ \sqrt{9+y^2}=1-y\end{cases}$

នោះ $\begin{cases}x=2\\ y=-4\end{cases}$ ។ ដូចនេះ $z=2-4i$ ។

លំហាត់ទី២៥

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមនេះជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ដែល $r>0$,$r,\theta\in\mathbb{R}$ ៖

ក) $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

ខ) $z=2\sqrt{3}+2i$

គ) $z=1+i\sqrt{3}$

ឃ) $z=2-2i$

ង) $z=\sqrt{3}-i$

ច) $z=2-2i\sqrt{3}$

ឆ) $z=-1+i$

ជ) $z=-4\sqrt{3}+4i$

ឈ) $z=-\sqrt{3}+3i$

ញ) $z=-3-i\sqrt{3}$

ដ) $z=-4-4i$

ឋ) $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ឌ) $z = 9$

ឍ) $z = 2i$

ណ) $z = -4i$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមនេះជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ដែល $r > 0$, $r,\theta \in \mathbb{R}$ ៖

ក) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ ។

ខ) $z = 2\sqrt{3} + 2i = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ ។

គ) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ឃ) $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$

ង) $z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]$

ច) $z = 2 - 2i\sqrt{3} = 4(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 4(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 4\left[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right]$

ឆ) $z = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

ជ) $z = -4\sqrt{3} + 4i = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ។

ឈ) $z = -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

ញ) $z = -3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ ។

ដ) $z = -4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ។

ឋ) $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3})$

$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ ។

ឌ) $z = 9 = 9\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

ឍ) $z = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ណ) $z = -4i = 4(cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) = 4\left[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right]$ ។

លំហាត់ទី២៦

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

ក) $z = 1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

ខ) $z = 1+\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}$

គ) $z = \sin\frac{4\pi}{9}+i(1-\cos\frac{4\pi}{9})$

ឃ) $z = \sin\frac{2\pi}{7}+i(1-\cos\frac{2\pi}{7})$

ង) $z = \sqrt{2+2\cos\frac{4\pi}{5}}+i\sqrt{2-2\cos\frac{4\pi}{5}}$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

ក) $z = 1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5}+2i\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$

$= 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ ។

ខ) $z = 1+\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7} = 2\cos^2\frac{2\pi}{7}+2i\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$

$= 2\cos\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$ ។

គ) $z = \sin\frac{4\pi}{9}+i(1-\cos\frac{4\pi}{9}) = 2\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}+2i\sin^2\frac{2\pi}{9}$

$= 2\sin\frac{2\pi}{9}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$ ។

ឃ) $z = \sin\frac{2\pi}{7}+i(1-\cos\frac{2\pi}{7}) = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2i\sin^2\frac{\pi}{7}$

$= 2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ ។

ង) $z = \sqrt{2+2\cos\frac{4\pi}{5}}+i\sqrt{2-2\cos\frac{4\pi}{5}} = \sqrt{4\cos^2\frac{2\pi}{5}}+i\sqrt{4\sin^2\frac{2\pi}{5}}$

$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ ។

លំហាត់ទី២៧

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z=2+\sqrt{3}+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z=2+\sqrt{3}+i=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\left(2\cos^2\frac{\pi}{12}+2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $z=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

លំហាត់ទី២៨

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$=2\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}+2i\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

ដូចនេះ $z=4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$ ។

ក)ចូរសរសេរ $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\frac{z_1}{z_2}$ ។

គ)ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញឲ្យបានថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ និង } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$

$$= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ខ)សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\frac{z_1}{z_2}$

យើងបាន $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

និង $z_2 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ហើយ $\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ឃ)ទាញឲ្យបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន ៖

$\frac{z_1}{z_2}=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ និង $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

យើងទាញបាន $\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

<u>លំហាត់ទី៣០</u>

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i$ និង $z_2=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$ ។

ក)ចូរសរសេរ $z=z_1z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)សរសេរ z_1 និង $z=z_1z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ទាញ រកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_2 ។

គ)ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញឲ្យបានថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ និង } \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ ។}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក)សរសេរ $z=z_1z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $z=(1+i)\left[(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)\right]$

$$=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)$$

$z=\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+1=2+2i\sqrt{3}$.

ដូចនេះ $z=2+2i\sqrt{3}$ ។

ខ)សរសេរ z_1 និង $z=z_1z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_2

យើងបាន $z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ហើយ $z=2+2i\sqrt{3}=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

តាម $z=z_1z_2$ គេទាញ បាន៖

$$z_2=\frac{z}{z_1}=\frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ដូចនេះ $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

គ)ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញឲ្យបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

យើងមាន $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (1) និង

$z_2=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$ (2)

ដោយផ្ទឹមសមីការ(1)&(2) គេបាន $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

ដូចនេះគេទាញ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ។

ក)ចូរស្រាយថាចំនួនកុំផ្លិច z អាចសរសេរជា ៖

$$z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{6}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{6}}\right)$$ ។

ខ)ទាញឲ្យបានថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z គឺ $z=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

គ)ប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ និង } \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថាចំនួនកុំផ្លិច z អាចសរសេរជា $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{6}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{6}}\right)$

យើងមាន $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}+i\sqrt{2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

ដូចនេះ $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{6}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{6}}\right)$ ព្រោះ $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ)ទាញឲ្យបានថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z គឺ $z=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

យើងមាន $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{6}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{6}}\right)$

ដោយ $\begin{cases} 1+\cos\frac{\pi}{6}=2\cos^2\frac{\pi}{12} \\ 1-\cos\frac{\pi}{6}=2\sin^2\frac{\pi}{12} \end{cases}$

គេបាន $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{12}}+i\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{12}}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

ដូចនេះ $z=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ពិត។

គ)ប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

យើងមាន $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (1) និង $z=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ (2)

ដោយផ្ទឹមសមីការ$(1)\&(2)$ គេបាន $2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

ដូចនេះគេទាញ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ។

ក)ចូរស្រាយថាចំនួនកុំផ្លិច z អាចសរសេរជា ៖

$$z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right)$$ ។

ខ)ទាញឲ្យបានថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z គឺ $z=2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

គ)ប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថាចំនួនកុំផ្លិច z អាចសរសេរជា $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right)$

យើងមាន $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}+i\sqrt{2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}$

$$=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

ដូចនេះ $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right)$ ព្រោះ $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ខ)ទាញឲ្យបានថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z គឺ $z=2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

យើងមាន $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}}+i\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right)$

ដោយ $\begin{cases}1+\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}\\ 1-\cos\frac{\pi}{4}=2\sin^2\frac{\pi}{8}\end{cases}$

គេបាន $z=\sqrt{2}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{\pi}{8}}+i\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{8}}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ ។

ដូចនេះ $z=2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$ ពិត។

គ)ប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

យើងមាន $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (1) និង $z=2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$ (2)

ដោយផ្ទឹមសមីការ $(1)\&(2)$ គេបាន $2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ដូចនេះគេទាញ $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

ក)ដោយប្រើ $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

ខ)ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

ដោយប្រើ $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$

យើងបាន

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\text{ ។}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\text{ ។}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

ខ)ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z

យើងមាន $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ដោយ $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $z=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ។

ក)ចូរស្រាយថាចំនួនកុំផ្លិចz អាចសរសេរជាទម្រង់ ៖

$$z=(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6})+i(\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3})$$ ។

ខ)ទាញឲ្យបាននូវទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថាចំនួនកុំផ្លិចz អាចសរសេរជាទម្រង់ $z=(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6})+i(\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3})$

យើងមាន $z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6})+i(\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3})$$ ពិត

ដូចនេះ $z=(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6})+i(\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3})$ ។

ខ)ទាញឲ្យបាននូវទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z

យើងមាន $z=(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6})+i(\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3})$

ដោយ $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}{2}=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$

$$\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}=2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=-2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

យើងបាន $z=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}-i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$ ។

លំហាត់ទី៣៥ (*ប្រឡងឆមាសទី១ ឆ្នាំ ២០០៩*)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1-i$ និង $w=\sqrt{3}+i$ ។

ក)គណនា $z.w$ និង $\frac{z}{w}$ ។

ខ)សរសេរ $z.w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា $z.w$ **និង** $\frac{z}{w}$

យើងបាន $zw=(1-i)(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}+1=(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})$ ។

$$\frac{z}{w}=\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}-1}{3+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}-i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$ ។

ដូចនេះ $zw=\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(1-\sqrt{3}\right)$ និង $\frac{z}{w}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}-i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ ។

ខ)សរសេរ $z.w$ **និង** $\frac{z}{w}$ **ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ**

យើងមាន $z=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$w=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$ ។

យើងបាន $zw = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ ។

ដូចនេះ៖ $zw = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

និង $\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ ។

លំហាត់ទី៣៦ (*ប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិឆ្នាំ២០០៩*)

ចូរសរសេរ $A = \frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ $A = \frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

យើងបាន $A = \frac{2\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

ដូចនេះ $A=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$ នោះ $\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

និង $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ នោះយើងបាន $A=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$ ។

ដូចនេះ $A=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ និង $A=-\sqrt{3}+i$

ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច A ។

លំហាត់ទី៣៧ (*ប្រឡងឆមាសទី១ឆ្នាំ ២០០៨*)

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$ និង $A=i(1+z)$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

ក)គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យបាន $A=z$ ។

គ)សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $w=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនា w^4 ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $A=i(1+z)$ ដោយ $z=a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$

យើងបាន $A=i\left(1+a+ib\right)=i(1+a)+i^2b$ ដោយ $i^2=-1$

ដូចនេះ $A=-b+i\left(1+a\right)$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ)កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យបាន $A = z$

យើងបាន $A = z$ សមមូល $-b + i(1+a) = a + ib$ នោះ $\begin{cases} -b = a \\ 1 + a = b \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} a + b = 0 & (1) \\ a - b = -1 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ $(1)\&(2)$ គេបាន $2a = -1$ នោះ $a = -\frac{1}{2}$ ហើយ $b = -a = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ ។

គ)សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $w = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនា w^4 ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

យើងបាន $w = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $w = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ $w^4 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4 = \frac{1}{4}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -\frac{1}{4}$ ។

ដូចនេះ $w = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ និង $w^4 = -\frac{1}{4} + 0.i$ ។

លំហាត់ទី៣៨ (*ប្រឡងឆមាសទី២ឆ្នាំ ២០០៨*)

Z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6})$ ។

ក)សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ)គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $Z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6})=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $Z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ។

ខ)សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6})=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6})$

$$Z=2\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$Z=2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន $Z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$ ។

គ)គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

តាមលទ្ធផលខាងលើយើងមាន៖

$$Z=2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]\ (1)\ \text{និង}\ \ Z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\ \ (2)$$

ដោយផ្ទឹមសមីការ $(1)\&(2)$ យើងបាន

$$2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

គេទាញបាន $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៩ (*ប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិឆ្នាំ២០០៨*)

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=x+iy$ និង $w=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ហើយ α ជាចំនួនពិត។

ក)កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z|=|w|$ ។

ខ)ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z|=|w|$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$ ។

គ)រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z=1\ ,w=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z|=|w|$

យើងមាន $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$ និង $|w|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$

ដោយ $|Z|=|w|$ សមមូល $\sqrt{x^2+y^2}=1$ ឬ $x^2+y^2=1$ ។

ដូចនេះទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z|=|w|$ គឺ $x^2+y^2=1$ ។

ខ)ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z|=|w|$ បង្ហាញថា $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$

បើ $|Z|=|w|$ នោះយើងមានទំនាក់ទំនង $x^2+y^2=1$

ដោយ $Z=x+iy$ នោះ $\overline{Z}=x-iy$ ។

យើងបាន $Z.\overline{Z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=1$ នោះគេទាញ $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$ ពិត។

ដូចនេះក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z|=|w|$ យើងបាន $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$ ពិត។

គ)រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z=1$, $w=1$

យើងបាន $Z=1$ សមមូល $x+iy=1=1+0.i$ នោះគេទាញ $x=1$, $y=0$ ។

ហើយ $w=1$ សមមូល $\cos\alpha+i\sin\alpha=1$ នោះគេទាញ $\begin{cases}\cos\alpha=1\\ \sin\alpha=0\end{cases}$ នោះ $\alpha=2k\pi$ គ្រប់ $k\in\mathbb{Z}$ ។

<u>**លំហាត់ទី៤០**</u>(*ប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិឆ្នាំ២០០៧*)

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ និង $B=\frac{x+iy}{1+i}$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។

ក)សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ)សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រក x និង y ដោយដឹងថា $\overline{B}-A^2=0$

($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)។

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$

យើងបាន

$$A^2=\left[\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2+2i\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$$A^2=3+2\sqrt{3}+1+4i-3+2\sqrt{3}-1=4\sqrt{3}+4i$$

ដូចនេះ $A^2=4\sqrt{3}+4i$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $A^2=4\sqrt{3}+4i=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ខ)សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $B=\frac{x+iy}{1+i}=\frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{x-ix+iy+y}{2}=\frac{y+x}{2}+i\frac{y-x}{2}$

ដូចនេះ $B=\frac{y+x}{2}+i\frac{y-x}{2}$ ។

រក x និង y ដោយដឹងថា $\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)

យើងមាន $B=\frac{y+x}{2}+i\frac{y-x}{2}$ នោះ $\overline{B}=\frac{y+x}{2}-i\frac{y-x}{2}=\frac{x+y}{2}+i\frac{x-y}{2}$

ហើយ $A^2=4\sqrt{3}+4i$

យើងបាន $\overline{B}-A^2=0$ សមមូល $\frac{x+y}{2}+i\frac{x-y}{2}=4+4i\sqrt{3}$

គេទាញបាន $\begin{cases}\frac{x+y}{2}=4 & (1)\\ \frac{x-y}{2}=4\sqrt{3} & (2)\end{cases}$

បូកសមីការ $(1)\&(2)$ យើងបាន $x=4+4\sqrt{3}$ ហើយដកសមីការ $(1)\&(2)$ យើងបាន $y=4-4\sqrt{3}$ ។

ដូចនេះ $x=4+4\sqrt{3}$; $y=4-4\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៤១(*ប្រឡងឆមាសទី២ឆ្នាំ ២០០៧*)

ក)ចំនួនកុំផ្លិច Z មានម៉ូឌុលស្មើ 2 និងអាគុយម៉ង់ស្មើ $\frac{\pi}{3}$។

ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត $a+ib$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

ខ)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Y=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$ ។

គណនា $Z.Y$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គ)បង្ហាញថា $\overline{Y}=Z$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត $a+ib$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត

ដោយចំនួនកុំផ្លិច Z មានម៉ូឌុលស្មើ 2 និងអាគុយម៉ង់ស្មើ $\frac{\pi}{3}$ នោះគេអាចសរសេរ៖

$$Z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$ ។

ខ) គណនា $Z.Y$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $Y=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$

$$=2\left[\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Y=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$$

យើងបាន $Z.Y=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1^2+\sqrt{3}^2=4$ ។

ដូចនេះ $Z.Y=4+0.i$ ។

គ)បង្ហាញថា $\overline{Y}=Z$

យើងមាន $Y=1-i\sqrt{3}$ នោះ $\overline{Y}=1+i\sqrt{3}=Z$ ពិត។

លំហាត់ទី៤២(*ប្រឡងឆមាសទី១ឆ្នាំ ២០០៧*)

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $w=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ក)បង្ហាញថា $z^2=w$ រួចគណនា z^2+z+1 ។

ខ)គណនា $A=z^2+z+i$ ។ សរសេរ A ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ)បង្ហាញថា A^{20} ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ក)បង្ហាញថា $z^2=w$ រួចគណនា z^2+z+1

យើងមាន $z=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $w=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

យើងបាន $z^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=w$ ពិត

ដូចនេះ $z^2=w$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $z^2+z+1=w+z+1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=0$ ។

ដូចនេះ $z^2+z+1=0$ ។

ខ)គណនា $A = z^2 + z + i$

យើងមាន $A = z^2 + z + i = \left(z^2 + z + 1\right) - 1 + i$ ដោយ $z^2 + z + 1 = 0$

ដូចនេះ $A = -1 + i$ ។

សរសេរ A ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $A = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\left[\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})\right]$$

ដូចនេះ $A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

គ)បង្ហាញថា A^{20} ជាចំនួនពិត

យើងមាន $A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន

$$A^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{20} = 2^{10}\left(\cos 15\pi + i\sin 15\pi\right)$$

ដូចនេះ $A = -2^{10} = -1024$ ជាចំនួនពិត។

លំហាត់ទី៤៣(*ប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិឆ្នាំ២០០៦*)

ក)កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឬសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ ។

ខ)រកឬស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ ។

គ)សរសេរ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)កំណត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1+i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$
លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ។

គេបាន $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+a\left(1+i\sqrt{3}\right)+b=0$ សមមូល $1+2i\sqrt{3}-3+a+ia\sqrt{3}+b=0$

សមមូល $(-2+a+b)+i(2\sqrt{3}+a\sqrt{3})=0$ នោះគេទាញ $\begin{cases} 2\sqrt{3}+a\sqrt{3}=0 \\ -2+a+b=0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} a=-2 \\ b=2-a=4 \end{cases}$ ។

ដូចនេះ $a=-2$, $b=4$ ។

ខ)រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ ៖

ចំពោះ $a=-2$, $b=4$ សមីការទៅជា $x^2-2x+4=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀត $x_1+x_2=2$ នោះគេទាញ $x_2=2-x_1=2-(1+i\sqrt{3})=1-i\sqrt{3}$ ។

ដូចនេះ $x_2=1-i\sqrt{3}$ ។

គ)សរសេរ $Z=\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងមាន $x_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

និង $x_2=1-i\sqrt{3}=\overline{x_1}=2\left[\cos(-\dfrac{\pi}{3})+i\sin(-\dfrac{\pi}{3})\right]$

នោះ $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2}{2}\left[\cos(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})+i\sin(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})\right]=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន

$$Z=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$ ។

ដូចនេះ $Z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

ក.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិច $u=1+i$ និង $v=\sqrt{3}+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួច

ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z ។

គ)ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ និង } \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{3+1}$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

ដូចនេះ $z=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ។

ខ)សរសេរ $u=1+i$ និង $v=\sqrt{3}+i$

ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z

យើងបាន $u=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ហើយ $v=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ដោយគេមាន $z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{u}{v}$

នោះ $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

គ)ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

យើងមាន $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ និង $z=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

យើងបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ពិត។

<u>លំហាត់ទី៤៥</u>

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $b=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ក.ចូរគណនា $z=a^2+b^2+iab$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ a , b និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $z=a^2+b^2+iab$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $z=(a+b)^2-2ab+iab=(a+b)^2+(-2+i)ab$

$$z=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-2+i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=(-1)^2+(-2+i)(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})=1-2+i=-1+i$$

ដូចនេះ $z=-1+i$ ។

ខ.សរសេរ a , b និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $a=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $a=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ និង

$b=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\bar{a}=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})$ ។

ហើយ $z=-1+i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=-1+i\sqrt{3}$ និង $b=3+\sqrt{3}i$

ក.ចូរសរសេរ $z=(a+b)(a^2+b^2)$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនាឫសទី 5 នៃ z ។

គ.ចូរសរសេរ a,b ,ab និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $z=(a+b)(a^2+b^2)$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $z=\left(-1+i\sqrt{3}+3+i\sqrt{3}\right)\left[\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(3+i\sqrt{3}\right)^2\right]$

$=\left(2+2i\sqrt{3}\right)\left(1-2i\sqrt{3}-3+9+6i\sqrt{3}-3\right)$

$=\left(2+2i\sqrt{3}\right)\left(4+4i\sqrt{3}\right)=8\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$

$=8\left(1+2i\sqrt{3}-3\right)=8\left(-2+2i\sqrt{3}\right)=-16+16i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z=-16+16i\sqrt{3}$ ។

ខ.សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រួចគណនាឬសទី 5 នៃ z

យើងមាន $z=-16+16i\sqrt{3}=32\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=32\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $z=32\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

តាមរូបមន្តឫសទី n : $w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

ដោយ $r=32$, $n=5$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$ យើងបាន៖

យើងបាន $w_k=2\left[\cos\left(\frac{2\pi+6k\pi}{15}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+6k\pi}{15}\right)\right]$ ដែល $k=0,1,2,3,4$

ចំពោះ $k=0$: $w_0=2\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=1$: $w_1=2\left(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=2: w_2 = 2\left(\cos\frac{14\pi}{15}+i\sin\frac{14\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=3: w_3 = 2\left(\cos\frac{20\pi}{15}+i\sin\frac{20\pi}{15}\right)$

ចំពោះ $k=4: w_4 = 2\left(\cos\frac{26\pi}{15}+i\sin\frac{26\pi}{15}\right)$

គ.សរសេរ a, b, ab និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $a=-1+i\sqrt{3}$ និង $b=3+\sqrt{3}i$

យើងបាន $a=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$b=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ហើយ $ab=4\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=4\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

និង $\frac{a}{b}=\frac{2}{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\sqrt{3}+i$ និង $b=-\sqrt{3}+3i$

ក.ចូរសរសេរ $z=a^2+b^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ a, b និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $z=a^2+b^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $a=\sqrt{3}+i$ និង $b=-\sqrt{3}+3i$

យើងបាន $z=(\sqrt{3}+i)^2+(-\sqrt{3}+3i)^2=3+2i\sqrt{3}-1+3-6i\sqrt{3}-9=-4-4i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z=-4-4i\sqrt{3}$ ។

ខ.សរសេរ a,b និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $a=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$b=-\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

និង $z=-4-4i\sqrt{3}=8\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $z=8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $b=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ក.ចូរសរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមានឫស a និង b ។

ខ.គេយក $z=i(a^2+ab-b^2)$ ។ ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត។

គ.ចូរសរសេរ a,b និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមានឫស a និង b

គេមាន $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $b=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ នោះយើងបាន

$$\begin{cases} s=a+b=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=1 \\ p=ab=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \end{cases}$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន a និង b ជាឫសរបស់សមីការ $z^2-sz+p=0$

ដូច្នេះសមីការដែលត្រូវសរសេរគឺ $z^2-z+1=0$ ។

ខ.សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z=i(a^2+ab-b^2)=\text{i}\left[(a+b)(a-b)+ab\right]$

ដោយ $a+b=1$, $ab=1$ និង $a-b=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}$

យើងបាន $z=i(i\sqrt{3}+1)=-\sqrt{3}+i$ ។

គ.សរសេរ a,b និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ហើយ $b=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$

និង $z=-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $z=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$ និង $w=(1-i)(1+iz)$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

$a)$ ចូរសរសេរ w ជាទម្រង់ពីជគណិត។

$b)$ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $w=z$ ។

$c)$ ចូរសរសេរ z និង z^{2019} ជាទម្រង់ត្រីកោណចំពោះតម្លៃ a និង b ទើបរកឃើញ។

ដំណោះស្រាយ

$a)$ សរសេរ w ជាទម្រង់ពីជគណិត៖

យើងបាន $w=(1-i)(1+iz)=1+iz-i+z$ ដោយ $z=a+ib$

នោះគេបាន $w=1+i(a+ib)-i+a+ib=1+ia-b-i+a+ib$

ដូចនេះ $w=(a-b+1)+i(a+b-1)$ ។

$b)$ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $w=z$ ៖

យើងបាន $w=z$ សមមូល $(a-b+1)+i(a+b-1)=a+ib$

នោះគេទាញ $\begin{cases} a-b+1=a \\ a+b-1=b \end{cases}$ ។

ដូចនេះ $a=1\ ,\ b=1$ ។

$c)$ សរសេរ z និង z^{2019} ជាទម្រង់ត្រីកោណចំពោះតម្លៃ a និង b ទើបរកឃើញ៖

ចំពោះ $a=1\ ,\ b=1$ យើងបាន $z=1+i$ មានម៉ូឌុល $r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ ។

គេបាន $z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ ៖

$$z^{2019}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2019}=\left(\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{2019\pi}{4}+i\sin\frac{2019\pi}{4}\right)$$

$\frac{2019\pi}{4}=504\pi+\frac{3\pi}{4}$ នោះ $\cos\frac{2019\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{4}$ & $\sin\frac{2019\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{4}$ ។

ដូចនេះ $z^{2019}=\left(\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$ ។

ក.គណនា $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។

ខ.សរសេរ $z_1\times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $z_1\times z_2$ **និង** $\frac{z_1}{z_2}$ ៖

យើងបាន $z_1z_2=(3+3i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)=3\sqrt{3}+3i+9i-3\sqrt{3}=12i$ ។

ហើយ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{(3+3i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{3\sqrt{3}-3i+9i+3\sqrt{3}}{3+1}$

$$=\frac{6\sqrt{3}+6i}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\text{ ។}$$

ដូចនេះ $z_1z_2=12i$ និង $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ ។

ខ.សរសេរ $z_1 \times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z_1 z_2 = 12i = 12(0+i) = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ។

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 9\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

គ.សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 9\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ដោយ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 9\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ ។

ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z និង Z^{2019} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ Z និង Z^{2019} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}{2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}$

$$= \cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

ដូចនេះ $Z=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ $Z^{2019}=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019}=\cos\frac{2019\pi}{12}+i\sin\frac{2019\pi}{12}$

ដោយ $\frac{2019\pi}{12}=168\pi+\frac{\pi}{4}$ នោះ $\cos\frac{2019\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{4}$ និង $\sin\frac{2019\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{4}$ ។

ដូចនេះ $Z^{2019}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យសមីការ $(E): z^3-(2+i)z^2+2(2+i)z-4i=0$ ។

១.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $z=i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.ចូរសរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z-i)(z^2+\alpha z+\beta)=0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (E) រួចសរសេរឫសនីមួយៗជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

១.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $z=i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E)

គេមានសមីការ $(E): z^3-(2+i)z^2+2(2+i)z-4i=0$

ជំនួស $z=i$ ទៅក្នុងសមីការ (E) គេបាន៖

$$i^3-(2+i)i^2+2(2+i)i-4i=0$$
$$-i+2+i+4i-2-4i=0$$
$$0=0$$

ដូចនេះ $z=i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) ។

២.សរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z-i)(z^2+\alpha z+\beta)=0$

គេមាន $(E): z^3-(2+i)z^2+2(2+i)z-4i=0$

គេបាន $z^3 - 2z^2 - iz^2 + 4z + 2iz - 4i = 0$

$$z(z^2 - 2z + 4) - i(z^2 - 2z + 4) = 0$$

$$(z - i)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

ដូចនេះសមីការអាចសរសេរ $(E): (z-i)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ (E) រួចសរសេរឫសនីមួយៗជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $(E): (z-i)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0$

ដើម្បីឲ្យផលគុណនៃពីរកត្តាស្មើសូន្យលុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែឲ្យកត្តាមួយស្មើសូន្យ

គេបាន $z - i = 0$ នោះ $z = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ។

ហើយ $z^2 - 2z + 4 = 0$, $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$

គេបាន $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ហើយ $z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$ ។

<u>លំហាត់ទី៥៣</u>

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ និង $w = 1 + i\sqrt{3}$ ។

១.ចូរសរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២.ស្រាយថា $z^5 + w^5 = 32\left[\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{4}\right) + i\left(\sin\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

៣.ចូរសរសេរ $\cos\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{4}$ ជាផលគុណកត្តារួច

ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z^5 + w^5$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ និង $w=1+i\sqrt{3}$

យើងបាន $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\,(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ។

និង $w=1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ។

២.ស្រាយថា $z^5+w^5=32\left[\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{4}\right)+i\left(\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន ៖

$$z^5=\left[2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right]^5=32(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})\quad(1)$$

$$w^5=\left[2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right]^5=32(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})\quad(2)$$

បូកសមីការ $(1)\,\&\,(2)$ យើងទទួលបាន៖

$$z^5+w^5=32\left[\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{4}\right)+i\left(\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$ ពិត។

៣.សរសេរ $\cos\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{4}$ ជាផលគុណកត្តា

តាមរូបមន្តបម្លែងពីផលបូកទៅផលគុណយើងបាន៖

$$\cos\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{4}=2\cos\frac{35\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{12}$$

$$\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{4}=2\sin\frac{35\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}$$

ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z^5+w^5 ៖

យើងមាន $z^5+w^5=32\left[\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{4}\right)+i\left(\sin\frac{5\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

$$= 32\left(2\cos\frac{35\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{12} + 2i\sin\frac{35\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $z^5 + w^5 = 64\cos\frac{5\pi}{12}\left(\cos\frac{35\pi}{24} + i\sin\frac{35\pi}{24}\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ និង $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។

១.ចូរសរសេរ $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.ចូរសរសេរ z, w , $z \times w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $\frac{z}{w} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\left(2+2i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{2+2} = \frac{2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + 2i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

ដូចនេះ $\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ។

២.សរសេរ z, w , $z \times w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $z = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ដូចនេះ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

និង $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ដូចនេះ $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

$z \times w = (4)(2)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $z \times w = 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ។

$\frac{z}{w} = \frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $\frac{z}{w} = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

៣.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន ៖

$\frac{z}{w} = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (1) និង $\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (2)

ផ្ទឹមសមីការ(1)&(2)គេបាន ៖

$$2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

<u>លំហាត់ទី៥៥</u>

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{3})$ ។

១.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២.ចូរសរសេរz ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})$

យើងបាន $z=\sqrt{2}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{6}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ។

ដូចនេះ $z=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ។

២.សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\left[\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})\right]$$

ដូចនេះ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

៣.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

យើងមាន $z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ និង $z=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

យើងបាន $4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

សមមូល $\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}+i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^{7}$ ។

១.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.គណនាឫសទី5នៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)^{7}$

$$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{35\pi}{12}+i\sin\frac{35\pi}{12}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{35\pi}{12}+i\sin\frac{35\pi}{12}\right)$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{35\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{35\pi}{12}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{39\pi}{12}+i\sin\frac{39\pi}{12}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{13\pi}{4}+i\sin\frac{13\pi}{4}\right)$$

ដោយ $\frac{13\pi}{4}=2\pi+\frac{5\pi}{4}$ នោះ $\cos\frac{13\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}$ និង $\sin\frac{13\pi}{4}=\sin\frac{5\pi}{4}$

ដូចនេះ $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\cos\frac{5\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $z=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ។

២.គណនាឬសទី5នៃ z

គេមាន $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ នោះ $r=2\ ,\ \theta=\frac{5\pi}{4}$ ។

តាមរូបមន្តឬសទី $n=5$ គេបាន ៖

$$w_k=\sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right]$$

$$w_k=\sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi+8k\pi}{20}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi+8k\pi}{20}\right)\right]$$

ចំពោះ $k=0,1,2,3,4$ គេបាន ៖

$$w_0=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$w_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{20}+i\sin\frac{13\pi}{20}\right)$$

$$w_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{20}+i\sin\frac{21\pi}{20}\right)$$

$w_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}\right)$ និង $w_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{20}+i\sin\frac{37\pi}{20}\right)$

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$ ។

១.គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.ចូរសរសេរ z_1 , z_2 , $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

យើងមាន $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$

យើងបាន $z_1 + z_2 = 1 + i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3} = 4 + 2i\sqrt{3}$

$$z_1 - z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right) - \left(3 + i\sqrt{3}\right) = -2$$

$$z_1 z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(3 + i\sqrt{3}\right) = 3 + i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} - 3 = 4i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(3 - i\sqrt{3}\right)}{9 + 3}$$

$$= \frac{3 - i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} + 3}{12} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}$$

ដូចនេះ: $z_1 + z_2 = 4 + 2i\sqrt{3}$, $z_1 - z_2 = -2$, $z_1 z_2 = 4i\sqrt{3}$ និង $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}$

២.សរសេរ z_1 , z_2 , $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$z_2 = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ហើយ $z_1 z_2 = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ និង $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}}{256(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}$ ។

១.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា $z=(x+y)+i(x-y)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

យើងបាន $\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}=2^{11}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

នោះ $z=\dfrac{2^{11}}{2^{8}}\left[\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{11\pi}{6}-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

ដូចនេះ $z=8\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\cos\dfrac{7\pi}{4}=\cos(2\pi-\dfrac{\pi}{4})=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

និង $\sin\dfrac{7\pi}{4}=\sin(2\pi-\dfrac{\pi}{4})=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $z=8\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}$ ។

២.កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា $z=(x+y)+i(x-y)$

យើងមាន $z = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$ និង $z = (x+y) + i(x-y)$

យើងបាន $(x+y) + i(x-y) = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$

សមមូល $\begin{cases} x + y = 4\sqrt{2} \\ x - y = -4\sqrt{2} \end{cases}$ សមមូល $x = 0$, $y = 4\sqrt{2}$ ។

ដូចនេះ៖ $x = 0$, $y = 4\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): z^2 - 2\left(\sqrt{3} + 2i\right)z + 4i\sqrt{3} = 0$

១.ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ ។គេតាង z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់ (E) ។

២.ចូរសរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

១.ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច $\mathbb{C}$

$(E): z^2 - 2\left(\sqrt{3} + 2i\right)z + 4i\sqrt{3} = 0$

គណនា $\Delta' = \left(\sqrt{3} + 2i\right)^2 - 4i\sqrt{3} = 3 + 4i\sqrt{3} - 4 - 4i\sqrt{3} = -1 = i^2$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1 = \sqrt{3} + 2i - i = \sqrt{3} + i \\ z_2 = \sqrt{3} + 2i + i = \sqrt{3} + 3i \end{array}\right.$

ដូចនេះ៖ $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 3i$ ។

២.សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

និង $z_2 = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យសមីការ $(E): (1+i)z^2-(3+7i)z+2+10i=0$

បង្ហាញថាសមីការ(E) មានឫសមួយជាចំនួនពិតរួចគណនាឫសមួយទៀត ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសមីការ(E) មានឫសមួយជាចំនួនពិត ៖

គេមាន$(E): (1+i)z^2-(3+7i)z+2+10i=0$

តាង $z_1=a\ , a\in\Re$ ជាឫសពិតរបស់សមីការ(E) នោះគេបាន

$$(1+i)a^2-(3+7i)a+2+10i=0$$
$$a^2+ia^2-3a-7ai+2+10i=0$$
$$(a^2-3a+2)+i(a^2-7a+10)=0$$

សមមូល $\begin{cases} a^2-3a+2=0 \\ a^2-7a+10=0 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} (a-2)(a-1)=0 \\ (a-2)(a-5)=0 \end{cases}$ គេទាញ $a=2$ ។

ដូចនេះសមីការ(E) មានឫសមួយជាចំនួនពិតគឺ $z_1=2$ ។

គណនាឫស z_2 មួយទៀត ៖

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $z_1z_2=\frac{c}{a}=\frac{2+10i}{1+i}$ ដោយ $z_1=2$

គេទាញ $z_2=\frac{1+5i}{1+i}=\frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+5i+5}{2}=3+2i$

ដូចនេះ $z_2=3+2i$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឲ្យពហុធា $f(z)=az^3+bz^2+cz+d$ ដែល $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ និង $z\in\mathbb{C}$ ។

ក)កំណត់លេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា $f(i)=0$ និង $f(1+i)=1+7i$ ។

ខ)ចូរដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ចំពោះលេខមេគុណ a,b,c,d ទើបរកឃើញខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ

ក)កំណត់លេខមេគុណ a,b,c,d

ដោយដឹងថា $f(i)=0$ និង $f(1+i)=1+7i$ នោះគេបាន៖

$$\begin{cases} ai^3+bi^2+ci+d=0 \\ a(1+i)^3+b(1+i)^2+c(1+i)+d=1+7i \end{cases}$$

$$\begin{cases} -ai-b+ci+d=0 \\ -2a+2ia+2ib+c+ci+d=1+7i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-b+d)+i(-a+c)=0 \\ (-2a+c+d)+i(2a+2b+c)=1+7i \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} -b+d=0 \\ -a+c=0 \\ -2a+c+d=1 \\ 2a+2b+c=7 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $a=1,b=2,c=1,d=2$ ។

ដូចនេះ $a=1,b=2,c=1,d=2$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$

ចំពោះ $a=1,b=2,c=1,d=2$ គេបាន ៖

$$f(z)=z^2+2z^3+z+2=(z+2)(z^2+1)$$

បើ $f(z)=0\Leftrightarrow(z+2)(z^2+1)=0$ គេទាញឫស $z_1=-2$, $z_2=-i$, $z_3=i$ ។

ដូចនេះ $z_1=-2$, $z_2=-i$, $z_3=i$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យពហុធា $f(z)=z^4+ax^3+bz^2+cz+d$ ដែល $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ និង $z\in\mathbb{C}$ ។

ក)បើ $f(i)=0$ ចូរស្រាយថា $f(z)=(z^2+1)(z^2+az+b-1)$ ។

ខ)រកលេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា $f(i)=0$ និង $f(1+i)=3(1+2i)$ ។

គ)ចូរដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ចំពោះលេខមេគុណ a,b,c,d ទើបរកឃើញខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ

ក)បើ $f(i)=0$ ស្រាយថា $f(z)=(z^2+1)(z^2+az+b-1)$

គេមាន $f(z)=z^4+ax^3+bz^2+cz+d$

គេបាន $f(i)=i^4+ai^3+bi^2+ci+d=1-ai-b+ci+d$

$$=(1-b+d)+i(c-a)=0$$

គេបាន $\begin{cases} d=b-1 & (1) \\ c=a & (2) \end{cases}$

យក $(1)\&(2)$ ជំនួសក្នុង $f(z)$ គេបាន៖

$$f(z)=z^4+az^3+bz^2+az+b-1=(z^4-1)+(az^3+az)+(bz^2+b)$$

$$=(z^2-1)(z^2+1)+az(z^2+1)+b(z^2+1)$$

$$=(z^2+1)(z^2+az+b-1)$$

ដូចនេះ $f(z)=(z^2+1)(z^2+az+b-1)$ ។

ខ)រកលេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា $f(i)=0$ និង $f(1+i)=3(1+2i)$

តាមសម្រាយខាងលើបើ $f(i)=0$ គេបាន $\begin{cases} d=b-1 & (1) \\ c=a & (2) \end{cases}$

ហើយ $f(z)=(z^2+1)(z^2+az+b-1)$

ចំពោះ $z=1+i$ គេបាន $f(1+i)=\left[(1+i)^2+1\right]\left[(1+i)^2+a(1+i)+b-1\right]$

ឬ $f(1+i)=(1+2i-1+1)(1+2i-1+a+ai+b-1)$

$=(1+2i)\left[(a+b-1)+i(2+a)\right]$

ដោយ $f(1+1)=3(1+2i)$ នោះ $(a+b-1)+i(2+a)=3$

គេទាញ $\begin{cases} a+b-1=0 \\ 2+a=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $a=-2\ ,b=3,c=-2\ ,\ d=2$ ។

គ)ដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$

ចំពោះ $a=-2\ ,b=3,c=-2\ ,\ d=2$ គេបាន $f(z)=(z^2+1)(z^2-2z+2)$

បើ $f(z)=0$ នោះ $(z^2+1)(z^2-2z+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+1=0 \\ z^2-2z+2=0 \end{array}\right.$

សមមូល $\left[\begin{array}{l} z^2=-1=i^2 \\ (z-1)^2=-1=i^2 \end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l} z=\pm i \\ z=1\pm i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1=-i\ ,\ z_2=i\ ,\ z_3=1-i\ ,\ z_4=1+i$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(z)=z^2-4z+8$ ដែល $z\in\mathbb{C}$ ។

ក)ចូរគណនា $f(3+2i)$ និង $f(3-2i)$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា

$f(3+2i)+i.f(3-2i)=(3+2i)+i(3-2i)$ ។

ខ)កំណត់ z ដើម្បីឲ្យ $f(z)=0$ ។

គ)កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $f(a+ib)=4-2i$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា $f(3+2i)$ និង $f(3-2i)$

យើងមាន $f(z)=z^2-4z+8$ ដែល $z\in\mathbb{C}$

យើងបាន $f(3+2i)=(3+2i)^2-4(3+2i)+8$

$=9+12i-4-12-8i+8$

$=1+4i$

ហើយ $f(3-2i)=(3-2i)^2-4(3-2i)+8$

$=9-12i-4-12+8i+8$

$=1-4i$

ដូចនេះ $f(3+2i)=1+4i$ និង $f(3-2i)=1-4i$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(3+2i)+i.f(3-2i)=(3+2i)+i(3-2i)$

យើងមាន $f(3+2i)+i.f(3-2i)=(1+4i)+i(1-4i)=1+4i+i+4=5+5i$

ហើយ $(3+2i)+i(3-2i)=3+2i+3i+2=5+5i$

ដូចនេះ $f(3+2i)+i.f(3-2i)=(3+2i)+i(3-2i)$ ពិត។

ខ)កំណត់ z ដើម្បីឲ្យ $f(z)=0$

គេបាន $z^2-4z+8=0$, $\Delta'=4-8=-4=(2i)^2$

គេទាញឫស $z_1=2-2i$, $z_2=2+2i$ ។

ដូចនេះ $z_1=2-2i$, $z_2=2+2i$ ។

គ)កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $f(a+ib)=4-2i$

គេមាន $f(z)=z^2-4z+8$

គេបាន $f(a+ib)=(a+ib)^2-4(a+ib)+8$

$$=a^2+2iab-b^2-4a-4ib+8$$

$$=(a^2-b^2-4a+8)+i(2ab-4b)$$

ដោយ $f(a+ib)=4-2i$ នោះគេទាញ $\begin{cases}a^2-b^2-4a+8=4\\2ab-4b=-2\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}(a-2)^2=b^2\\(a-2)b=-1\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}(a-2)^2=b^2 & (1)\\b=-\dfrac{1}{a-2} & (2)\end{cases}$

យកសមីការ(2)ជំនួយសក្នុង(1) គេបាន $(a-2)^2=\dfrac{1}{(a-2)^2}$

សមមូល $(a-2)^4=1$ សមមូល $\left[\begin{array}{l}a-2=-1\\a-2=1\end{array}\right.$ នោះ $a_1=1$ ឬ $a_2=3$

ចំពោះ $a=1$ នោះតាម(2)គេបាន $b=-\dfrac{1}{1-2}=1$ ។

ចំពោះ $a=3$ នោះតាម(2)គេបាន $b=-\dfrac{1}{3-2}=-1$ ។

ដូចនេះ $a=1,b=1$ ឬ $a=3,b=-1$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(1+i\alpha)(1+i\beta)(1+i\gamma)$ ដែល α,β,γ ជាបីចំនួនពិត

ដែលជាឫសរបស់សមីការ $8x^3-4x^2-4x+1=0$ ។

១.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.ចូរបង្ហាញថាម៉ូឌុលនៃ z ជាចំនួនសនិទាន ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត៖

យើងមាន $z=(1+i\alpha)(1+i\beta)(1+i\gamma)=(1+i\alpha+i\beta-\alpha\beta)(1+i\gamma)$

$$z=\left[1-(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)\right]+i(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma)$$

ដោយ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតជាឬសរបស់សមីការ $8x^3-4x^2-4x+1=0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវៀត $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{1}{2}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=-\dfrac{1}{2}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{1}{8}\end{cases}$

ដូចនេះ $z=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{8}i$ ។

២.បង្ហាញថាម៉ូឌុលនៃ z ជាចំនួនសនិទាន ៖

យើងមាន $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{8}i$ នោះ $|z|=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{25}{64}}=\sqrt{\dfrac{169}{64}}=\dfrac{13}{8}$ ជាចំនួនសនិទាន។

ដូចនេះម៉ូឌុលនៃ z ជាចំនួនសនិទាន ។

លំហាត់ទី៦៥

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a=2\sqrt{3}-2i$ និង $b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។

១.សរសេរ $Z=a^2+b^2+4ai+\sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២.សរសេរ $a\,;b$ និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ $Z=a^2+b^2+4ai+\sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $a=2\sqrt{3}-2i$, $b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ នោះគេបាន ៖

$$Z=(2\sqrt{3}-2i)^2+(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2+4i(2\sqrt{3}-2i)+\sqrt{2}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$$
$$=12-8i\sqrt{3}-4+2-4i-2+8i\sqrt{3}+8-2+2i=14-2i$$

ដូចនេះ $Z=14-2i$ ។

២.សរសេរ a ,b និង ab ជារាងត្រីកោណមាត្រ ៖

$$a=2\sqrt{3}-2i=4(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2})=4(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$$
$$b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$
$$=2(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2\left[\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{4})\right]$$
$$=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$a.b=8\left[\cos(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4})\right]=8(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$$

ដូចនេះ $a=4\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]$

$b=2(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$; $ab=8(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i\sqrt{3}$ និង $w=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។

ក.គណនា $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

ខ.ចូរសរសេរ z , w និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.សរសេរ $\left(\frac{z}{w}\right)^{2019}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ៖

យើងបាន $\frac{z}{w}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}$

$=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}}{2+2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ខ.សរសេរ z , w និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$w=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

និង $\frac{z}{w}=\frac{2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ។

គ.សរសេរ $\left(\frac{z}{w}\right)^{2019}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត៖

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន ៖

$\left(\frac{z}{w}\right)^{2019}=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019}=\cos\frac{673\pi}{4}+i\sin\frac{673\pi}{4}$

មាន $\frac{673\pi}{4}=168\pi+\frac{\pi}{4}$ នោះ $\cos\frac{673\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ និង $\sin\frac{673\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\frac{z}{w}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ។

ក.ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.គេយក $W=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}Z$ ។

ចូរសរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិតនិងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមាន $Z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$

គេបាន $Z=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$Z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $Z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

ខ.សរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិតនិងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមាន $W=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}Z$ ដោយ $Z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

គេបាន $W=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ដោយ $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

និង $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

នោះ $W=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\times\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}}{4}$

ដូចនេះ $W=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $W=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$$

ដូចនេះ $\mathrm{W}=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

គ.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ៖

យើងមាន $\mathrm{W}=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$ (1)

និង $W=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2)

តាម(1)&(2) គេទាញបាន ៖

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ។

ក.បង្ហាញថា $Z^2=2+2i$ ។

ខ.ចូរសរសេរ Z^2 និង Z^{4038} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ចូរសរសេរ Z^{4038} ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $Z^2=2+2i$ **៖**

គេមាន $Z=\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}$

គេបាន $Z^2=\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$

$$=(\sqrt{2}+1)+2i\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}-(\sqrt{2}-1)$$

$$=\sqrt{2}+1+2i\sqrt{\sqrt{2}^2-1}-\sqrt{2}+1=2+2i$$

ដូចនេះ $Z^2=2+2i$

ខ.សរសេរ Z^2 **និង** Z^{4038} **ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖**

យើងបាន $Z^2=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន ៖

$$Z^{4038}=\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2019}$$

$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{2019\pi}{4}+i\sin\frac{2019\pi}{4}\right)$$

ដោយ $\frac{2019\pi}{4}=504\pi+\frac{3\pi}{4}$

ដូចនេះ $Z^{4038}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ។

គ.សរសេរ Z^{4038} ជាទម្រង់ពីជគណិត៖

យើងមាន $Z^{4038}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ដោយ $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

និង $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $Z^{2019}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2019}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2^{3028}+2^{3028}i$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+i)(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}$

ក.បង្ហាញថា $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ រួចសរសេរវាជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ រួចសរសេរវាជាទម្រង់ពីជគណិត៖

គេមាន $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+i)(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}$

ដោយ $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

គេបាន $(\sqrt{3}+i)(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ ពិត។

ម្យ៉ាងទៀត $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}$

$$=\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}}{2+2}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$$

ដូចនេះ $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

ខ.សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងមាន $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$$

ដូចនេះ $z=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

គ.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ៖

យើងមាន $z=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$ (1)

និង $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2)

ដោយប្រៀបធៀបសមីការ(1)និង(2)គេបាន ៖

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

លំហាត់ទី៧០

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $u=-1-i\sqrt{3}$ និង $v=\sqrt{3}+i$

ក.ចូរសរសេរ $z=u^2+v^2+|uv|$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរគណនាឫសកាទីបីនៃ z ។

គ.ចូរសរសេរ u និង v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $z=u^2+v^2+|uv|$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

គេបាន $z=\left(-1-i\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}+i\right)^2+|-1-i\sqrt{3}|.|\sqrt{3}+i|$

$=-2+2i\sqrt{3}+2+2i\sqrt{3}+\sqrt{1+3}\sqrt{3+1}$

$=4i\sqrt{3}+4=4+4i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z=4+4i\sqrt{3}$ ។

ខ.គណនាឫសទីបីនៃ z ៖

យើងមាន $z=4+4i\sqrt{3}=8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

នោះគេទាញ $r=8\ ,\ \theta=\frac{\pi}{3}$ ។

តាមរូបមន្តឫសទី n គឺ $w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

ដោយ $n=3$ និង $r=8$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ គេបាន ៖

$w_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi+6k\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+6k\pi}{9}\right)\right]$ ដែល $k=0,1,2$ ។

ចំពោះ $k=0 : w=2\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

ចំពោះ $k=1: w_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$

ចំពោះ $k=2: w_2=2\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$

គ.សរសេរ u និង v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $u=-1-i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

និង $v=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $u=1+i$ និង $v=\sqrt{3}+i$

ក.ចូរសរសេរ $z=u^2+v^2+4u-2iv$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរគណនាឫសការេនៃ z ។

គ.ចូរសរសេរ u,v,uv និង $\frac{u}{v}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $z=u^2+v^2+4u-2iv$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $u = 1 + i$ និង $v = \sqrt{3} + i$

គេបាន $z = (1+i)^2 + (\sqrt{3}+i)^2 + 4(1+i) - 2i(\sqrt{3}+i)$

$$= 1 + 2i - 1 + 3 + 2i\sqrt{3} - 1 + 4 + 4i - 2i\sqrt{3} + 2$$
$$= 8 + 6i$$

ដូចនេះ $z = 8 + 6i$ ។

ខ.គណនាឫសការេនៃ z ៖

តាង $w_k = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ ជាឫសការេនៃ z នោះ $w_k{}^2 = z$

គេបាន $(x+iy)^2 = 8 + 6i$

សមមូល $(x^2 - y^2) + 2xyi = 8 + 6i$

គេទាញ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $x_1 = 3$, $y_1 = 1$ ឬ $x_2 = -3$, $y_2 = -1$ ។

ដូចនេះ $w_1 = 3 + i$, $w_2 = -3 - i$ ជាឫសការេដែលត្រូវរក។

គ.សរសេរ u, v, uv និង $\frac{u}{v}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $u = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$v = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$uv = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

លំហាត់ទី៧២

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $u=-\frac{3}{\sqrt{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$ និង $v=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

ក.ចូរសរសេរ u និង v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ.ចូរសរសេរ $z=\frac{u^8}{v^5}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដើម្បីឲ្យ z^n ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ u និង v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

គេមាន $u=-\frac{3}{\sqrt{2}}+i\sqrt{\frac{3}{2}}$ និង $v=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

យើងបាន $u=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

$$u=\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$ ។

និង $v=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ។

ខ.សរសេរ $z=\frac{u^8}{v^5}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $u=\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ និង $v=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន ៖

$$u^8 = \left[\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^8 = 6^4\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$v^5 = \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^5 = 32\left(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}\right)$$

យើងបាន $z = \frac{6^4}{32}\left[\cos\left(\frac{20\pi}{3} - \frac{25\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{20\pi}{3} - \frac{25\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $z = \frac{81}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ។

គ.កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដើម្បីឲ្យ z^n ជាចំនួនពិត ៖

គេមាន $z = \frac{81}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន ៖

$$z^n = \left[\frac{81}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right]^n = \left(\frac{81}{2}\right)^n\left(\cos\frac{5n\pi}{12} + i\sin\frac{5n\pi}{12}\right)$$

ដើម្បីឲ្យ z^n ជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $\sin\frac{5n\pi}{12} = 0$

សមមូល $\frac{5n\pi}{12} = k\pi$ ឬ $n = \frac{12k}{5}$ ដោយ $n \in \mathbb{N}$ នោះ $k = 5p, p \in \mathbb{N}$

គេបាន $n = 12p$, $p \in \mathbb{N}$ ។

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ n គឺ $n = 12$ ដែលត្រូវនឹង $p = 1$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៧៣

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $u = 2 + 2i\sqrt{3}$ និង $v = 2 + 2i$

ក.ចូរសរសេរ u និង v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ.ចូរសរសេរ $z = \dfrac{u^4}{v^5}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.ចូរសរសេរ z^{2019} ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ u និង v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមាន $u = 2 + 2i\sqrt{3}$ និង $v = 2 + 2i$

យើងបាន $u = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$។

និង $v = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ។

ខ.សរសេរ $z = \dfrac{u^4}{v^5}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រគេមាន ៖

$$u^4 = \left[4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4 = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$v^5 = \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5 = 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

គេបាន $z = \dfrac{256}{128\sqrt{2}}\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

គ.សរសេរ z^{2019} ជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន $z^{2019}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{2019}$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{673\pi}{4}+i\sin\frac{673\pi}{4}\right)$$

ដោយ $\frac{673\pi}{4}=168\pi+\frac{\pi}{4}$ នោះគេបាន $\cos\frac{673\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

និង $\sin\frac{673\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ដូចនេះ $z=\sqrt{2^{2019}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{1009}+i\,2^{1009}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $u=2\sqrt{3}+2i$ និង $v=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

ក.គណនា $z=u^2+v^2-2\sqrt{3}u-2\sqrt{2}v+4$ និងដាក់លទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ u , v និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\bar{z}=\frac{1}{32}\left(\frac{u}{v}\right)^8$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $z=u^2+v^2-2\sqrt{3}u-2\sqrt{2}v+4$ ដោយសរសេរលទ្ធផល

ជាទម្រង់ពីជគណិត៖

$z=u^2+v^2-2\sqrt{3}u-2\sqrt{2}v+4$ ដោយ $u=2\sqrt{3}+2i$ និង $v=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$$=\left(2\sqrt{3}+2i\right)^2+\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+2i\right)-2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+4$$

$$=8+8i\sqrt{3}+4i-12-4i\sqrt{3}-4-4i+4$$

$$=-4+4i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $z=-4+4i\sqrt{3}$ ។

ខ.សរសេរ u , v និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $u=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$v=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z=-4+4i\sqrt{3}=8\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

គ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $z=\frac{1}{32}\left(\frac{u}{v}\right)^8$ ៖

គេមាន $\frac{u}{v}=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\frac{u}{v}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ $\left(\frac{u}{v}\right)^8=256\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $z=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

គេបាន $\bar{z}=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=8\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+isn\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ (2)

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $\bar{z}=\frac{1}{32}\left(\frac{u}{v}\right)^8$ ពិត។

លំហាត់ទី៧៥

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

ក.គណនា z និង z^2 ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ z^2 និង z^{4038} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ដែលធ្វើឲ្យ z^{2n} ជាចំនួនពិត។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា z និង z^2 ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត៖

គេមាន $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $z=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ។

ហើយ $z^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}+2i\frac{3-1}{4}-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}+i$$

ដូចនេះ $z^2=\sqrt{3}+i$ ។

ខ.សរសេរ z^2 និង z^{4038} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z^2=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ $z^{4038}=\left(z^2\right)^{2019}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{2019}$

$$=2^{2019}\left(\cos\frac{673\pi}{2}+i\sin\frac{673\pi}{2}\right)$$

ដោយគេមាន $\frac{673\pi}{2}=336\pi+\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $z^{4038}=2^{2019}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ។

គ.កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ដែលធ្វើឲ្យ z^{2n} ជាចំនួនពិត៖

គេមាន $z^2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (សម្រាយខាងលើ)

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ $z^{2n}=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

ដើម្បីឲ្យ z^{2n} ជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $\sin\frac{n\pi}{6}=0$ សមមូល $\frac{n\pi}{6}=k\pi$

ឬ $n=6k$ ដែល $k\in\mathbb{N}$ (ព្រោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)។

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ n ដែលធ្វើឲ្យ z^{2n} ជាចំនួនពិតគឺ $n=6$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៧៦

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

ក.គណនា z^2 និង z^4 ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ z^2 និង z^4 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.ចូរកំណត់ពីរចំនួនកុំផ្លិច p និង q ដោយដឹងថា z^2 និង z^4 ជាឫសរបស់សមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2+px+q=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា z^2 និង z^4 ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

យើងបាន $z^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

$$=2+\sqrt{3}+2i-2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+2i$$

ដូចនេះ $z^2=2\sqrt{3}+2i$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $z^4=\left(z^2\right)^2=\left(2\sqrt{3}+2i\right)^2=12+8i\sqrt{3}-4$

ដូចនេះ $z^4=8+8i\sqrt{3}$ ។

ខ.សរសេរ z^2 និង z^4 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z^2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

និង $z^4=8+8i\sqrt{3}=16\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

គ.កំណត់ពីរចំនួនកុំផ្លិច p និង q៖

ដោយ z^2 និង z^4 ជាឫសរបស់សមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2+px+q=0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវៀតគេបាន $\begin{cases} z^2+z^4=-p \\ z^2.z^4=q \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} p=-\left(2\sqrt{3}+2i+8+8i\sqrt{3}\right)=-\left(8+2\sqrt{3}\right)-i\left(2+8\sqrt{3}\right) \\ q=(2\sqrt{3}+2i)(8+8i\sqrt{3})=(16+48)i=64i \end{cases}$

ដូចនេះ $p=-\left(8+2\sqrt{3}\right)-i\left(2+8\sqrt{3}\right)$ និង $q=64i$ ។

លំហាត់ទី៧៧

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ និង $w=1-i$

ក.គណនា $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

ខ.ចូរសរសេរ $\frac{z}{w}$ និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z និង z^{2019} ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$

យើងមាន $z=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ និង $w=1-i$

យើងបាន $\frac{z}{w}=\frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}{2(1-i)}=\frac{\left[(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)\right](1+i)}{4}$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$=\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{z}{w}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ.សរសេរ $\frac{z}{w}$ និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $\frac{z}{w}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ។

និង $w=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$ ។

គ.ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z និង z^{2019} ៖

យើងមាន $\frac{z}{w}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ នោះ $z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)w$

ឬ $z=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រគេបាន $z^{2019}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{2019}$

$$=\sqrt{2}^{2019}\left(\cos\frac{673\pi}{4}+i\sin\frac{673\pi}{4}\right)$$

ដោយគេមាន $\frac{673\pi}{4}=\frac{672\pi+\pi}{4}=168\pi+\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $z^{2019}=\sqrt{2}^{2019}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

លំហាត់ទី៧៨

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{3}+i$ និង $w=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

ក.គណនា $z.w$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

ខ.ចូរសរសេរ z , zw និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.សរសេរ w^{2019} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $z.w$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$

គេមាន $z=\sqrt{3}+i$ និង $w=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

យើងបាន
$$zw=(\sqrt{3}+i)(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $zw=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ ។

ខ.សរសេរ z , zw និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

$$zw=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ហើយ $w=\dfrac{4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{z}=\dfrac{4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$

ដូចនេះ $w=2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

គ.សរសេរ w^{2019} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងមាន $w=2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រគេបាន $w^{2019}=\left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right]^{2019}$

$$=2^{2019}\left(\cos\frac{673\pi}{4}+i\sin\frac{673\pi}{4}\right)$$

ដោយគេមាន $\dfrac{673\pi}{4}=\dfrac{672\pi+\pi}{4}=168\pi+\dfrac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $w^{2019}=2^{2019}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ។

លំហាត់ទី៧៩

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=2+2i$ និង $w=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ ។

ក.គណនា $\dfrac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

ខ.ចូរសរសេរ z , w និង $\dfrac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ.សរសេរ $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{2019}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ $a+ib$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$

យើងបាន $\frac{z}{w}=\frac{2+2i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}=\frac{(2+2i)(\sqrt{6}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(\sqrt{6}-i\sqrt{2})}$

$\frac{z}{w}=\frac{2\sqrt{6}-2i\sqrt{2}+2i\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{6+2}=\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})+2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$

ដូចនេះ $\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ខ.សរសេរ z , w និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

យើងបាន $z=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$w=\sqrt{6}+i\sqrt{2}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

និង $\frac{z}{w}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ។

គ.សរសេរ $\left(\frac{z}{w}\right)^{2019}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនិងជាទម្រង់ពីជគណិត៖

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រយើងបាន ៖

$\left(\frac{z}{w}\right)^{2019}=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019}=\cos\frac{673\pi}{4}+i\sin\frac{673\pi}{4}$

មាន $\frac{673\pi}{4}=168\pi+\frac{\pi}{4}$ នោះ $\cos\frac{673\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ និង $\sin\frac{673\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\frac{z}{w}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៨០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ និង $b=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

១.ចូរសរសេរ $z=a^2-ab-b^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា $ax+by=ab+2\sqrt{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ $z=a^2-ab-b^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $a=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ និង $b=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

$$z=\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)^2-(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{2})-\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^2$$

$$=2+2i\sqrt{6}-3-\sqrt{6}-2i-3i+\sqrt{6}-3-2i\sqrt{6}+2$$

$$=-2-5i$$

២.កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា $ax+by=ab+2\sqrt{6}$

គេមាន $a=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ និង $b=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

$$(\sqrt{2}+i\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+i\sqrt{2})y=(\sqrt{2}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i\sqrt{2})+2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{2}x+i\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+i\sqrt{2}y=\sqrt{6}+2i+3i-\sqrt{6}+2\sqrt{6}$$

$$\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y\right)+i\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right)=2\sqrt{6}+5i$$

គេទាញ $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=2\sqrt{6}\\ \sqrt{3}x+\sqrt{2}y=5\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $x=\sqrt{3}\,,y=\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=-\frac{1}{8}-i\frac{\sqrt{3}}{8}$

១.ចូរសរសេរ z និង z^{2018} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២.គណនាឫសទី 4 នៃ z ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ z និង z^{2018} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $z=-\frac{1}{8}-i\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ

$$z^{2018}=\left[\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right]^{2018}=\frac{1}{4^{2018}}\left(\cos\frac{8072\pi}{3}+i\sin\frac{8072\pi}{3}\right)$$

ដោយ $\frac{8072\pi}{3}=2690\pi+\frac{2\pi}{3}$ នោះ $z^{2018}=\frac{1}{4^{2018}}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

២.គណនាឫសទី 4 នៃ z ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $z=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ នោះ $r=\frac{1}{4}\ ,\ \theta=\frac{4\pi}{3}$

តាមរូបមន្តឫសទី $n=4$ គេបាន ៖

$$w_k=\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

ឬ $w_k=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi+3k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+3k\pi}{6}\right)\right]$ ដែលចំពោះ $k=0,1,2,3$

គេបាន ៖

$$w_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$w_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+i\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$w_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$w_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

លំហាត់ទី៨២

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ និង $w=\sqrt{\frac{2}{3}}-i\sqrt{\frac{2}{3}}$ ។

១.ចូរសរសេរ $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.ចូរសរសេរ $z\,,w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$ និង $w=\sqrt{\frac{2}{3}}-i\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1-i)$

យើងបាន $\frac{z}{w}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)}{(1-i)}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i+1\right)$

ដូចនេះ $\frac{z}{w}=\frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{8}+i\frac{3\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{8}=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{8}+i\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$ ។

២.សរសេរ z , w និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $z=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

និង $w=\sqrt{\frac{2}{3}}-i\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

ហើយ $\frac{z}{w}=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។

៣.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

មាន $\frac{z}{w}=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (1) និង $\frac{z}{w}=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{8}+i\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$ (2)

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $X_n=\sin\frac{(n-1)(n+2)\pi}{2n(n+1)}+i\cos\frac{(n-1)(n+2)\pi}{2n(n+1)}$

ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

១.ចូរសរសេរ X_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២.គណនា $Y_n=X_1X_2X_3\ldots X_n$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣.ចូរសរសេរ $Z_n=\frac{1+Y_n}{i}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរ X_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យក $\theta_n = \dfrac{(n-1)(n+2)\pi}{2n(n+1)}$ នោះ $\dfrac{\pi}{2} - \theta_n = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{(n-1)(n+2)\pi}{2n(n+1)} = \dfrac{\pi}{n(n+1)}$

គេបាន $X_n = \sin\theta_n + i\cos\theta_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_n\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta_n\right)$

ដូចនេះ $X_n = \cos\dfrac{\pi}{n(n+1)} + i\sin\dfrac{\pi}{n(n+1)}$ ។

២.គណនា $Y_n = X_1 X_2 X_3 \ldots . X_n$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $X_n = \cos\dfrac{\pi}{n(n+1)} + i\sin\dfrac{\pi}{n(n+1)}$

យក $\alpha_n = \dfrac{\pi}{n(n+1)} = \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{n+1}$

នោះ $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \left(\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) + \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) + \ldots + \left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{n+1}\right)$

$$= \pi - \frac{\pi}{n+1}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \frac{n\pi}{n+1}$$

គេបាន $Y_n = X_1 X_2 X_3 \ldots . X_n$

$$= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . + \alpha_n)$$

ដូចនេះ $Y_n = \cos\dfrac{n\pi}{n+1} + i\sin\dfrac{n\pi}{n+1}$ ។

៣.សរសេរ $Z_n = \dfrac{1+Y_n}{i}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $1 + Y_n = 1 + \cos\dfrac{n\pi}{n+1} + i\sin\dfrac{n\pi}{n+1}$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{2(n+1)} + 2i\cos\frac{n\pi}{2(n+1)}\sin\frac{n\pi}{2(n+1)}$$

$$1+Y_n=2\cos\frac{n\pi}{2(n+1)}\left[\cos\frac{n\pi}{2(n+1)}+i\sin\frac{n\pi}{2(n+1)}\right]$$ និង $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

គេបាន $Z_n=\frac{1+Y_n}{i}$

$$=2\cos\frac{n\pi}{2(n+1)}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

ដូចនេះ $Z_n=2\cos\frac{n\pi}{2(n+1)}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2(n+1)}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right]$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

១) $|zw|=|z||w|$

២) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|\text{w}|}$ ដែល $w\neq 0$ ។

៣) $|z+w|\leq|z|+|w|$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

១) $|zw|=|z||w|$

តាង $z=x+iy$ និង $w=u+iv$ ដែល $x,y,u,v\in\Re$

គេបាន $zw=(x+iy)(u+iv)=(\text{xu}-\text{yv})+\text{i}(\text{xv}+\text{yu})$

$$|zw|=\sqrt{(xu-yv)^2+(xv+yu)^2}$$
$$=\sqrt{x^2u^2-2xyuv+y^2v^2+x^2v^2+2xyuv+y^2u^2}$$
$$=\sqrt{x^2u^2+x^2v^2+y^2u^2+y^2v^2}$$
$$=\sqrt{x^2(\text{u}^2+v^2)+y^2(u^2+v^2)}$$
$$=\sqrt{(u^2+v^2)(x^2+y^2)}=\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{u^2+v^2}$$

ដូចនេះ $|zw|=|z||w|$

២) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ ដែល $w \neq 0$

គេមាន $\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{(xu+yv)+i(yu-xv)}{u^2+v^2}$

ឬ $\frac{z}{w} = \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}$

គេបាន $\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{xu+yv}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{x^2u^2+2xyuv+y^2v^2+y^2u^2-2xyuv+x^2v^2}}{u^2+v^2}$

$= \frac{\sqrt{x^2(u^2+v^2)+y^2(u^2+v^2)}}{u^2+v^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{|z|}{|w|}$

ដូចនេះ: $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ ។

៣) $|z+w| \leq |z|+|w|$

គេមាន $z+w = x+iy+u+iv = (x+u)+i(y+v)$

គេបាន $|z+w| = \sqrt{(x+u)^2+(y+v)^2}$

ហើយ $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ និង $|w| = \sqrt{u^2+v^2}$

ឧបមាថា $|z+w| \leq |z|+|w|$ ពិត

សមមូល $\sqrt{(x+u)^2+(y+v)^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{u^2+v^2}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$(x+u)^2+(y+v)^2 \leq x^2+y^2+u^2+v^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}$$

$$2xu+2yv \leq 2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}$$

$$xu+yv \leq \sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}$$

លើកជាការេគេបាន ៖

$$(xu+yv)^2 \le (x^2+y^2)(u^2+v^2)$$

$$x^2u^2+y^2v^2+2xyuv \le x^2u^2+x^2v^2+y^2u^2+y^2v^2$$

$$-(x^2v^2-2xyuv+y^2u^2) \le 0$$

$-(xv-yu)^2 \le 0$ ពិត។ ដូចនេះ $|z+w| \le |z|+|w|$។

លំហាត់ទី៨៥

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ហើយគេតាង $\bar{z}$ និង $\bar{w}$ ជាចំនួនផ្លិចឆ្លាស់រៀងគ្នារបស់ z និង w។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $z\,\bar{w}+\bar{z}\,w \ge 2|z||w|$ រួចទាញឲ្យបាននូវវិសមភាព $|z+w| \le |z|+|w|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z\,\bar{w}+\bar{z}\,w \le 2|z||w|$ រួចទាញ $|z+w| \le |z|+|w|$

តាង $z=x+iy$ និង $w=a+ib$ ដែល x,y,a,b ជាចំនួនពិត

នោះ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|w|=\sqrt{a^2+b^2}$ ។

យើងមាន $z\,\bar{w}+\bar{z}\,w=(x+iy)(a-ib)+(x-iy)(a+ib)=2(ax+by)$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វ៉សគេមាន $ax+by \le \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$

នោះគេទាញ $\dfrac{z\bar{w}+\bar{z}w}{2} \le |z||w|$ ឬ $z\,\bar{w}+\bar{z}\,w \le 2|z||w|$ ពិត។

ម្យ៉ាងទៀត $|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=|z|^2+|w|^2+z\bar{w}+\bar{z}w$

ដោយ $z\,\bar{w}+\bar{z}\,w \le 2|z||w|$

នោះ $|z+w|^2 \le |z|^2+|w|^2+2|z||w|=\left(|z|+|w|\right)^2$

ដូចនេះ $|z+w| \le |z|+|w|$ ពិត។

លំហាត់ទី៨៦

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុល $|a|=|b|=|c|=1$ ។

ចូរស្រាយថា $z=a+b+c$ និង $w=ab+bc+ca$ ជាកុំផ្លិចមានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z|=|w|$

គេមាន $z=a+b+c$ នោះ $\bar{z}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

ដោយ $a.\bar{a}=|a|^2=1$ នោះ $\bar{a}=\frac{1}{a}$ ហើយ $\bar{b}=\frac{1}{b}\ ,\ \bar{c}=\frac{1}{c}$

គេបាន $\bar{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{w}{abc}$

គេទាញ $|z|=|\bar{z}|=\left|\frac{w}{abc}\right|=\frac{|w|}{|a|\ |b|\ |c|}$ ដោយ $|a|=|b|=|c|=1$

ដូចនេះ $|z|=|w|$ ។

លំហាត់ទី៨៧

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ។

ចូរស្រាយថា $|z+1|=|z+i|$ លុះត្រាតែ $x=y$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z+1|=|z+i|$ លុះត្រាតែ $x=y$

គេមាន $z=x+iy\ ,\ x,y\in\Re$

ករណីទី១

បើ $x = y$ នោះ $z = x + iy = y + iy$

គេបាន $|z+1| = |y+1+iy| = \sqrt{(y+1)^2 + y^2}$

និង $|z+i| = |y+i(y+1)| = \sqrt{y^2 + (y+1)^2}$

ដូចនេះ $|z+1| = |z+i|$ ។

ករណីទី២

បើ $|z+1| = |z+i|$ នោះ $|x+1+iy| = |x+i(y+1)|$

ឬ $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

ឬ $x^2 + y^2 + 2x + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1$ គេទាញ $x = y$ ។

ដូចនេះ $|z+1| = |z+i|$ លុះត្រាតែ $x = y$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ដែល $z_1 \neq z_2$ ហើយ $|z_1| = |z_2| = 1$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច w គេបាន $\dfrac{w + z_1 z_2 \overline{w} - (z_1 + z_2)}{z_1 - z_2}$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{w + z_1 z_2 \overline{w} - (z_1 + z_2)}{z_1 - z_2}$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ

តាង $Z = \dfrac{w + z_1 z_2 \overline{w} - (z_1 + z_2)}{z_1 - z_2}$

គេបាន $\overline{Z} = \dfrac{\overline{w} + \overline{z_1}\,\overline{z_2}\, w - (\overline{z_1} + \overline{z_2})}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}$

ដោយ $\overline{z_1} = \dfrac{|z_1|^2}{z_1} = \dfrac{1}{z_1}$ និង $\overline{z_2} = \dfrac{|z_2|^2}{z_2} = \dfrac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z} = \dfrac{\overline{w} + \dfrac{1}{z_1 z_2} w - \left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)}{\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}} = \dfrac{z_1 z_2 \overline{w} + w - (z_1 + z_2)}{z_2 - z_1}$

$$\overline{Z} = -\frac{w + z_1 z_2 \overline{w} - (z_1 + z_2)}{z_1 - z_2} = -Z \text{ ឬ } Z + \overline{Z} = 0$$

ដោយ $Z + \overline{Z} = 0$ នោះ $\text{Re}(Z) = \dfrac{Z + \overline{Z}}{2} = 0$ ។

ដូចនេះ: $\dfrac{w + z_1 z_2 \overline{w} - (z_1 + z_2)}{z_1 - z_2}$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឲ្យ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$

និង $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ ។ ចូរស្រាយថា $\left|\dfrac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $Z = \dfrac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$ នោះ $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z_1}\,\overline{z_2} + \overline{z_2}\,\overline{z_3} + \overline{z_3}\,\overline{z_1}}{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}}$

ដោយ $\overline{z_1} = \dfrac{r^2}{z_1}$, $\overline{z_2} = \dfrac{r^2}{z_2}$, $\overline{z_3} = \dfrac{r^2}{z_3}$ ព្រោះ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$

គេបាន $\overline{Z}=\dfrac{\dfrac{r^2}{z_1}\cdot\dfrac{r^2}{z_2}+\dfrac{r^2}{z_2}\cdot\dfrac{r^2}{z_3}+\dfrac{r^2}{z_1}\cdot\dfrac{r^2}{z_3}}{\dfrac{r^2}{z_1}+\dfrac{r^2}{z_2}+\dfrac{r^2}{z_3}}=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}\times r^2$

គេមាន $|Z|^2=Z\times\overline{Z}$ ដោយ $Z=\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}$

និង $\overline{Z}=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}\times r^2$

គេបាន $|Z|^2=r^2$ ឬ $|Z|=r$ ពិត ។

ដូចនេះ $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$ ។

លំហាត់ទី៩០

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ ដែល $|z_1|=|z_2|=\ldots=|z_n|=r$ ។

បង្ហាញថា $Z=\dfrac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\ldots.z_n}$ ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា Z ជាចំនួនពិត

ដើម្បីស្រាយថា Z ជាចំនួនពិតយើងគ្រាន់តែស្រាយឲ្យឃើញថា

$\operatorname{Im}(Z)=\dfrac{Z-\overline{Z}}{2i}=0$ ឬ $Z=\overline{Z}$

យើងមាន $Z=\dfrac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\ldots.z_n}$

នោះយើងបាន $\overline{Z}=\dfrac{(\overline{z_1}+\overline{z_2})(\overline{z_2}+\overline{z_3})\dots(\overline{z_{n-1}}+\overline{z_n})(\overline{z_n}+\overline{z_1})}{\overline{z_1}\,\overline{z_2}\dots\overline{z_n}}$

គេមាន $|z_1|=|z_2|=\dots=|z_n|=r$ នោះយើងបាន $z_k\overline{z_k}=|z_k|^2=r^2$

ឬ $\overline{z_k}=\dfrac{r^2}{z_k}$ គ្រប់ $k=1,2,3,\dots,n$ ។

គេអាចសរសេរ $\overline{Z}=\dfrac{\left(\dfrac{r^2}{z_1}+\dfrac{r^2}{z_2}\right)\left(\dfrac{r^2}{z_2}+\dfrac{r^2}{z_3}\right)\dots\left(\dfrac{r^2}{z_{n-1}}+\dfrac{r^2}{z_n}\right)\left(\dfrac{r^2}{z_n}+\dfrac{r^2}{z_1}\right)}{\left(\dfrac{r^2}{z_1}\right)\left(\dfrac{r^2}{z_2}\right)\dots\left(\dfrac{r^2}{z_n}\right)}$

$$\overline{Z}=\dfrac{\dfrac{r^2(z_1+z_2)}{z_1z_2}\,\dfrac{r^2(z_2+z_3)}{z_2z_3}\times\dots\times\dfrac{r^2(z_{n-1}+z_n)}{z_{n-1}z_n}\,\dfrac{r^2(z_n+z_1)}{z_nz_1}}{\dfrac{r^{2n}}{z_1z_2z_3\dots z_n}}$$

$$\overline{Z}=\dfrac{\dfrac{r^{2n}(z_1+z_2)(z_2+z_3)\dots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{(z_1z_2z_3\dots z_n)^2}}{\dfrac{r^{2n}}{z_1z_2z_3\dots z_n}}$$

$$\overline{Z}=\dfrac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\dots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2z_3\dots z_n}$$

$\overline{Z}=Z$ ពិត

ដូចនេះ $Z=\dfrac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\dots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\dots z_n}$ ជាចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី៩១

គេតាង z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចផ្សេងៗពីគ្នាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$ ។

បើ $z_1 + z_2 z_3$, $z_2 + z_1 z_3$ និង $z_3 + z_1 z_2$ ជាចំនួនពិតនោះបង្ហាញថា $z_1 z_2 z_3 = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $z_1 z_2 z_3 = 1$ ៖

តាង $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$

ដោយ $z_1 + z_2 z_3$, $z_2 + z_1 z_3$ និង $z_3 + z_1 z_2$ ជាចំនួនពិតនោះយើងបាន

$$\begin{cases} z_1 + z_2 z_3 = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ \overline{z_3} \\ z_2 + z_1 z_3 = \overline{z_2} + \overline{z_1}\ \overline{z_3} \\ z_3 + z_1 z_2 = \overline{z_3} + \overline{z_1}\ \overline{z_2} \end{cases}$$

ដោយគេមាន $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$ នោះគេបាន $\overline{z_1} = \frac{r^2}{z_1}$, $\overline{z_2} = \frac{r^2}{z_2}$, $\overline{z_3} = \frac{r^2}{z_3}$

គេទាញ $$\begin{cases} z_1 + z_2 z_3 = \frac{r^2}{z_1} + \frac{r^4}{z_2 z_3} = \frac{r^2(z_2 z_3 + r^2 z_1)}{z_1 z_2 z_3} & (1) \\ z_2 + z_1 z_3 = \frac{r^2}{z_2} + \frac{r^4}{z_1 z_3} = \frac{r^2(z_1 z_3 + r^2 z_2)}{z_1 z_2 z_3} & (2) \\ z_3 + z_1 z_2 = \frac{r^2}{z_3} + \frac{r^4}{z_1 z_2} = \frac{r^2(z_1 z_2 + r^2 z_3)}{z_1 z_2 z_3} & (3) \end{cases}$$

ផលសងសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$(z_1-z_2)-z_3(z_1-z_2)=\frac{r^2\left[r^2(z_1-z_2)-z_3(z_1-z_2)\right]}{z_1z_2z_3}$$

សមមូល $(z_1-z_2)(1-z_3)=\dfrac{r^2(z_1-z_2)(r^2-z_3)}{z_1z_2z_3}$

ដោយ $z_1\neq z_2$ នោះគេទាញបាន $1-z_3=\dfrac{r^2(r^2-z_3)}{z_1z_2z_3}$ (4)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $1-z_1=\dfrac{r^2(r^2-z_1)}{z_1z_2z_3}$ (5) និង $1-z_2=\dfrac{r^2(r^2-z_2)}{z_1z_2z_3}$ (6)

.ករណីទី១

បើ $z_1=1$ តាម(5) គេទាញបាន $0=\dfrac{r^2(r^2-1)}{z_2z_3}$ នោះ $r=1$

ហើយក្នុងករណីនេះទំនាក់ទំនង(4)និង(6)

ទៅជា $\begin{cases}1-z_3=\dfrac{1-z_3}{z_2z_3}\\ 1-z_2=\dfrac{1-z_2}{z_2z_3}\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}(1-z_3)(z_2z_3-1)=0\\(1-z_2)(z_2z_3-1)=0\end{cases}$ សមមូល $z_2=z_3=1$

ឬ $z_2z_3=1$ ។

ដូចនេះ $z_1z_2z_3=1$ ពិត។

ដោយសមីការ$(4),(5),(6)$ មានលក្ខណៈឆ្លុះនោះការសិក្សាករណី $z_2=1$ ឬ $z_3=1$

ដូចគ្នានិង$z_1=1$ដែរ។

.ករណីទី២ យើងនិងសិក្សាចំពោះ $z_1 \neq 1$, $z_2 \neq 1$ និង $z_3 \neq 1$

តាម (4),(5)និង (6) គេទាញបាន

$$z_1z_2z_3 = \frac{r^2(r^2-z_3)}{1-z_3} = \frac{r^2(r^2-z_2)}{1-z_2} = \frac{r^2(1-z_1)}{1-z_1} \quad (7)$$

គេទាញ $\frac{r^2-z_3}{1-z_3} = \frac{r^2-z_2}{1-z_2} = \frac{r^2-z_1}{1-z_1}$ (ព្រោះ $r > 0$)

សមមូល $\frac{r^2-1}{1-z_3}+1 = \frac{r^2-1}{1-z_2}+1 = \frac{r^2-1}{1-z_1}+1$ សមមូល

$$\frac{r^2-1}{1-z_3} = \frac{r^2-1}{1-z_2} = \frac{r^2-1}{1-z_1} \quad (8)$$

ដោយ $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ នោះសមភាព(8) ពិតលុះត្រាតែ $r=1$ ។

ចំពោះ $r=1$ តាម (7) គេបាន $z_1z_2z_3 = \frac{1-z_3}{1-z_3} = \frac{1-z_2}{1-z_2} = \frac{1-z_1}{1-z_1} = 1$

ពិតព្រោះ $z_1 \neq 1$, $z_2 \neq 1$ និង $z_3 \neq 1$ ។

សរុបមកបញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់រួចរាល់។

លំហាត់ទី៩២

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ ។

១.ចូរគណនា $A = z+z^2+z^4$ និង $B = z^3+z^5+z^6$ ។

២.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{z}{1+z^2} + \frac{z^2}{1+z^4} + \frac{z^3}{1+z^6} = -2$ ។

ដំណោះស្រាយ

១)គណនា $A = z + z^2 + z^4$ និង $B = z^3 + z^5 + z^6$

គេមាន $A + B = z + z^2 + z^4 + z^3 + z^5 + z^6$

$$A + B = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = z\frac{1 - z^6}{1 - z} = \frac{z - z^7}{1 - z}$$

ដោយ $z^7 = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

គេបាន $A + B = \frac{z - 1}{1 - z} = -1 \quad (1)$

ហើយ $A.B = (z + z^2 + z^4)(z^3 + z^5 + z^6)$

$A.B = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$ ដោយ $z^7 = 1$

នោះ $A.B = z^4 + z^6 + 1 + z^5 + 1 + z + 1 + z^2 + z^3$

$$= 3 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$$

$$= 3 + A = 3 - 1 = 2 \quad (2)$$

(1)និង (2)គេបានប្រពន្ធ័ $\begin{cases} A + B = -1 \\ A.B = 2 \end{cases}$

នោះ A និង B ជាឫសសមីការ $X^2 + X + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 8 = -7 = 7i^2$

គេទាញឫស $X_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$, $X_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $A = z + z^2 + z^4$ ដោយ $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$

នោះ $A = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right) + i\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right)$

ផ្នែកនិម្មិតនៃ A គឺ $\mathrm{Im(A)} = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

ដោយ $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$ ហើយ $\sin\frac{4\pi}{7}>0$, $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$

នោះ $\text{Im}(A)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$

ដូចនេះ $A=X_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$ និង $B=X_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

២)ស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+z^4}+\frac{z^3}{1+z^6}=-2$

តាង $W=\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+z^4}+\frac{z^3}{1+z^6}$

$$W=\frac{z(1+z^4)(1+z^6)+z^2(1+z^2)(1+z^6)+z^3(1+z^2)(1+z^4)}{(1+z^2)(1+z^4)(1+z^6)}$$

ដោយ $\begin{cases} z(1+z^4)(1+z^6)=z+z^7+z^5+z^{11}=1+z+z^4+z^5 \\ z^2(1+z^2)(1+z^6)=z^2+z^8+z^4+z^{10}=z+z^2+z^3+z^4 \\ z^3(1+z^2)(1+z^4)=z^3+z^7+z^5+z^9=1+z^2+z^3+z^5 \end{cases}$

ហើយ $(1+z^2)(1+z^4)(1+z^6)=(1+z^2)(1+z^4+z^6+z^{10})$

$$=1+z^4+z^6+z^{10}+z^2+z^6+z^8+z^{12}$$

$$=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+2z^6$$

$$W=\frac{2(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5)}{1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+2z^6}$$

ដោយ $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{1-z^7}{1-z}=0$

គេបាន $W=\frac{2(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)-2z^6}{(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)+z^6}=\frac{2-z^6}{z^6}=-2$

ដូចនេះ $\frac{z}{1+z^2}+\frac{z^2}{1+z^4}+\frac{z^3}{1+z^6}=-2$ ពិត។

លំហាត់ទី៩៣

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+z+z^2)(1+z+z^3)(1+z+z^4)=z(1+z)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+z+z^2)(1+z+z^3)(1+z+z^4)=z(1+z)$

គេមាន $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

គេបាន $z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

ហើយ $1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{1-z^5}{1-z}=0$

គេទាញ $\begin{cases}1+z+z^2=-z^3-z^4=-z^3(1+z)\\1+z+z^3=-z^2-z^4=-z^2(1+z^2)\\1+z+z^4=-z^2-z^3=-z^2(1+z)\end{cases}$

គេបាន $(1+z+z^2)(1+z+z^3)(1+z+z^4)=-z^7(1+z)^2(1+z^2)$

ដោយ $z^7=z^2.z^5=z^2$

ហើយ $(1+z)(1+z^2)=1+z+z^2+z^3=-z^4$

គេបាន $(1+z+z^2)(1+z+z^3)(1+z+z^4)=z^6(1+z)=\text{z}(1+\text{z})$

ដូចនេះ $(1+z+z^2)(1+z+z^3)(1+z+z^4)=z(1+z)$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$ និង $w=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

ចូរគណនា $S=3z^7-7w^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $S=3z^7-7w^4$

គេមាន $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$ និង $w=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$

នោះ $\begin{cases} z+w=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}=1 \\ zw=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2})(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2})=\frac{1+7}{4}=2 \end{cases}$

គេទាញថា z និង w ជាឫសនៃសមីការ $X^2-X+2=0$ នោះគេបាន

$\begin{cases} z^2-z+2=0 \\ w^2-w+2=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} z^2=z-2 & (i) \\ w^2=w-2 & (ii) \end{cases}$

តាម (i) គេបាន $z^3=z(z-2)=z^2-2z=z-2-2z=-z-2$

លើកជាការេ $z^6=(-z-2)^2=z^2+4z+4=z-2+4z+4=5z+2$

គេបាន $z^7=z(5z+2)=5z^2+2z=5(z-2)+2z=7z-10$ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាម (ii) គេបាន

$w^4=(w-2)^2=w^2-4w+4=w-2-4w+4=-3w+2$

យើងបាន $S=3z^7-7w^4=3(7z-10)-7(-3w+2)=21(z+w)-44=21-44=-23$

ដូចនេះ $S=3z^7-7w^4=-23$ ។

លំហាត់ទី៩៥

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ។ តាង $A=z+z^4$ និង $B=z^2+z^3$

ក)ចូរគណនា z^5 រួចបង្ហាញថា A និង B ជាចំនួនពិត។

ខ)សរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមាន A និង B ជាឫសរួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា z^5 រួចបង្ហាញថា A និង B ជាចំនួនពិត

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1+i.0=1$

ដូចនេះ $z^5=1$ ។

យើងមាន $A=z+z^4$ នោះ $\overline{A}=\overline{z}+\left(\overline{z}\right)^4=\frac{|z|^2}{z}+\left[\frac{|z|^2}{z}\right]^4$ ដោយ $|z|=1$

គេបាន $\overline{A}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^4}=\frac{z^3+1}{z^4}=\frac{z^4+z}{z^5}=z+z^4=A$ (ព្រោះ $z^5=1$)

ដោយ $\overline{A}=A$ នោះ A ជាចំនួនពិត។

ម្យ៉ាងទៀត $B=z^2+z^3$ នោះ $\overline{B}=\left(\overline{z}\right)^2+\left(\overline{z}\right)^3=\left(\frac{|z|^2}{z}\right)^2+\left(\frac{|z|}{z}\right)^3$

$\overline{B}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=\frac{z+1}{z^3}=\frac{z^2+z^3}{z^5}=z^2+z^3=B$ (ព្រោះ $z^5=1$)

ដោយ $\overline{B}=B$ នោះ B ជាចំនួនពិត។

ខ)សរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមានឫស A និង B

គេមាន $A+B=z+z^4+z^2+z^3=z\frac{1-z^4}{1-z}=\frac{z-z^5}{1-z}=\frac{z-1}{1-z}=-1$ (ព្រោះ $z^5=1$)

និង $A.B=\left(z+z^4\right)\left(z^2+z^3\right)=z^3+z^4+z^6+z^7=z^3+z^4+z+z^2=-1$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀតសមីការដឺក្រេទីពីរដែលត្រូវសរសេរគឺ $(E): X^2+X-1=0$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

គេមាន $A=z+z^4=z+\frac{1}{z}=z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$

ដោះស្រាយសមីការ $(E): X^2-X-1=0$ ដោយ $\Delta=1+4=5$

នោះសមីការមានឫស $\left[\begin{array}{l} X_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ X_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

ដោយ A ជាឫសមួយនៃ (E) និង $A>0$ នោះគេទាញ $A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ដោយ $A=2\cos\frac{2\pi}{5}$ នោះគេទាញ $2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ។

ដូចនេះ $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៩៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ។គេតាង $z=\omega+\omega^2+\omega^4$ និង $w=\omega^3+\omega^5+\omega^6$ ។

ក)រក ω^7 រួចស្រាយថា z និង w ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។

ខ)ស្រាយថាផ្នែកនិម្មិតនៃ z ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

គ)ស្រាយថា z និង w ជាឫសនៃសមីការ $(E):x^2+x+2=0$ ។

ឃ)ដោះស្រាយសមីការ (E) រួចទាញរក z និង w ។

ង)ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)រក ω^7 រួចស្រាយថា z និង w ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

តាមរូបមន្តដឺម័រយើងបាន $\omega^7=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ ។

ដូចនេះ $\omega^7=1$ ។

យើងមាន $z=\omega+\omega^2+\omega^4$ នោះ $\bar{z}=\bar{\omega}+\bar{\omega}^2+\bar{\omega}^4=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^4}$

$$\bar{z}=\frac{\omega^3+\omega^2+1}{\omega^4}=\frac{\omega^6+\omega^5+\omega^3}{\omega^7}=\omega^6+\omega^5+\omega^3=w$$

ដូចនេះ z និង w ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។

ខ)ស្រាយថាផ្នែកនិម្មិតនៃ z ជាចំនួនវិជ្ជមាន

គេមាន $z=\omega+\omega^2+\omega^4$ ដោយ $\omega=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$

នោះ $z=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)$

ផ្នែកនិម្មិតនៃ z គឺ $\mathrm{Im}(z)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

ដោយ $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$ ហើយ $\sin\frac{4\pi}{7}>0$, $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$

នោះ $\mathrm{Im}(z)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$ ។ដូចនេះផ្នែកនិម្មិតនៃ z ជាចំនួនវិជ្ជមាន។

គ)ស្រាយថា z និង w ជាឫសនៃសមីការ $(E):x^2+x+2=0$

គេមាន $z+w=\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^3+\omega^5+\omega^6=\omega\frac{1-\omega^6}{1-\omega}=\frac{\omega-1}{1-\omega}=-1$ (1)

ហើយ $z.w=(\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6)$

$$z.w=\omega^4+\omega^6+\omega^7+\omega^5+\omega^7+\omega^8+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}$$ ដោយ $\omega^7=1$

នោះ $z.w=\omega^4+\omega^6+1+\omega^5+1+\omega+1+\omega^2+\omega^3$

$$=3+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6=3+z=3-1=2 \quad (2)$$

(1)និង (2)គេបានប្រពន្ធ័ $\begin{cases} z+w=-1 \\ z.w=2 \end{cases}$ នោះ z និង w ជាឫសសមីការ

$(E):\ x^2+x+2=0$ ។

ឃ)ប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញថា $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

ដោះស្រាយសមីការ (E): $x^2+x+2=0$ មាន $\Delta=1-8=-7=7i^2$

គេទាញឫស $x_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$

ផ្នែកនិម្មិតនៃ z គឺ $\text{Im}(z)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}>0$ (សម្រាយខាងលើ)

នោះគេទាញ $z=x_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$ និង $w=x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យសមីការ $(E):z^3-(7+4i)z^2+(9+16i)z+9-12i=0$

១)ចូរកំណត់ចំនួនពិត b ដោយដឹងថា $z_1=bi$ ជាឫសមួយនៃសមីការ(E)។

២)ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដោយដឹងថា $z_2=a$ជាឫសមួយនៃសមីការ(E)។

៣)ទាញរកឫស z_3មួយទៀតរបស់សមីការ (E) ។

៤)ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o,\vec{i},\vec{j})$គេដៅចំណុចបី A,B,C មានអាហ្វិករៀងគ្នា z_1,z_2,z_3 ។ ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

១)កំណត់ចំនួនពិត b

ដោយ $z_1=bi$ជាឫសមួយនៃសមីការ(E)នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ ។

គេបាន $(bi)^3-(7+4i)(bi)^2+(9+16i)(bi)+9-12i=0$

$$-b^3i+7b^2+4b^2i+9bi-16b+9-12i=0$$

$$(7b^2-16b+9)+i(-b^3+4b^2+9b-12)=0$$

គេទាញ $\begin{cases}7b^2-16b+9=0\\-b^3+4b^2+9b-12=0\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}(b-1)(7b-9)=0\\(b-1)(-b^2+3b+12)=0\end{cases}$ ។

ដូចនេះ $b=1$ និង $z_1=i$ ។

២)កំណត់ចំនួនពិត a

ដោយដឹងថា ដោយ $z_2 = a$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (E) នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង (E)

គេបាន $a^3 - (7+4i)a^2 + (9+16i)a + 9 - 12i = 0$

សមមូល $(a^3 - 7a^2 + 9a + 9) - i(4a^2 - 16a + 12) = 0$

គេទាញ $\begin{cases} a^3 - 7a^2 + 9a + 9 = 0 \\ 4a^2 - 16a + 12 = 0 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} (a-3)(a^2 - 4a - 3) = 0 \\ 4(a-1)(a-3) = 0 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 3$ និង $z_2 = 3$ ។

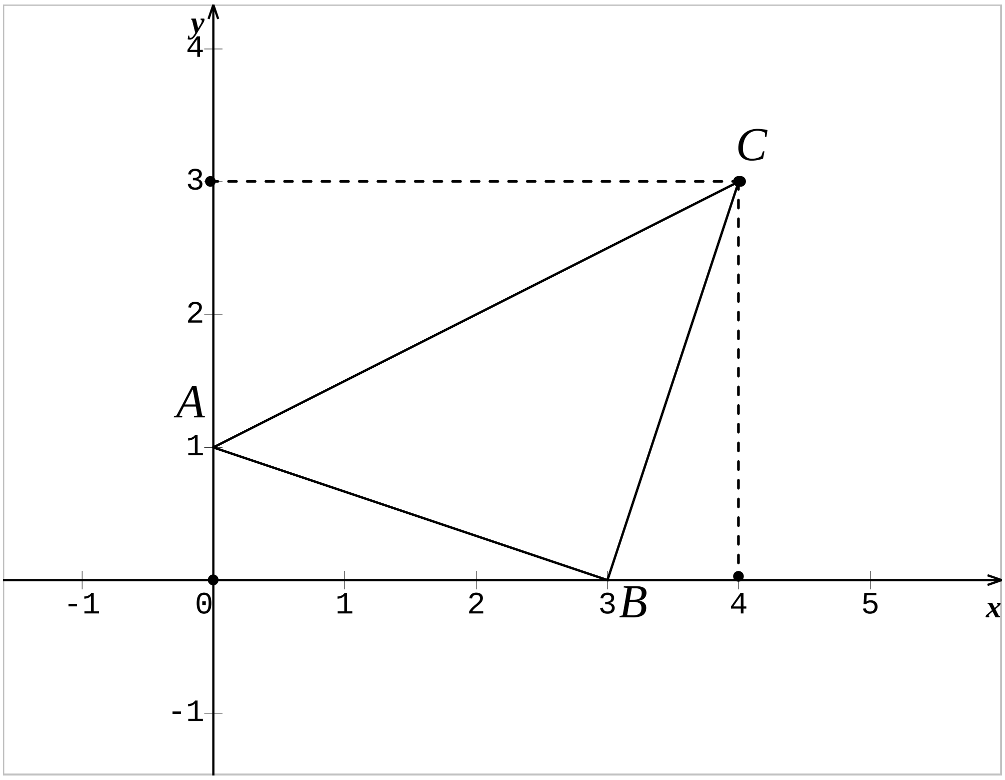
៣)ទាញរកឫស z_3 មួយទៀតរបស់សមីការ (E)

ផលគុណនៃឫសរបស់សមីការ (E) គឺ $z_1 z_2 z_3 = -9 + 12i$

គេទាញ $z_3 = \dfrac{-9+12i}{z_1 z_2}$ ដោយ $z_1 = i$, $z_2 = 3$

គេបាន $z_3 = \dfrac{-9+12i}{3i} = 4 + 3i$ ។ ដូចនេះ $z_3 = 4 + 3i$ ។

៤)រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC



ដោយ A,B,C មានអាហ្វិករៀងគ្នា $z_1 = i, z_2 = 3, z_3 = 4+3i$

នោះគេបាន $A(0,1), B(3,0), C(4,3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{BA} = (-3,1)$ និង $\overrightarrow{BC} = (1,3)$

គេបាន $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$,$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ នោះ $BA = BC$

ហើយ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3+3 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

លំហាត់ទី៩៨

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{1+2t-t^2}{1+t^2} + i\,\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ ។

គេតាង M ជាចំណុចរូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ ចូរកំណត់សមីការតាងឲ្យសំណុំចំណុច M កាលណា t ប្តូរតម្លៃរួចសង់សំណុំចំណុច M នោះផង។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់សមីការតាងឲ្យសំណុំចំណុច M កាលណា t ប្តូរតម្លៃរួចសង់សំណុំចំណុច M

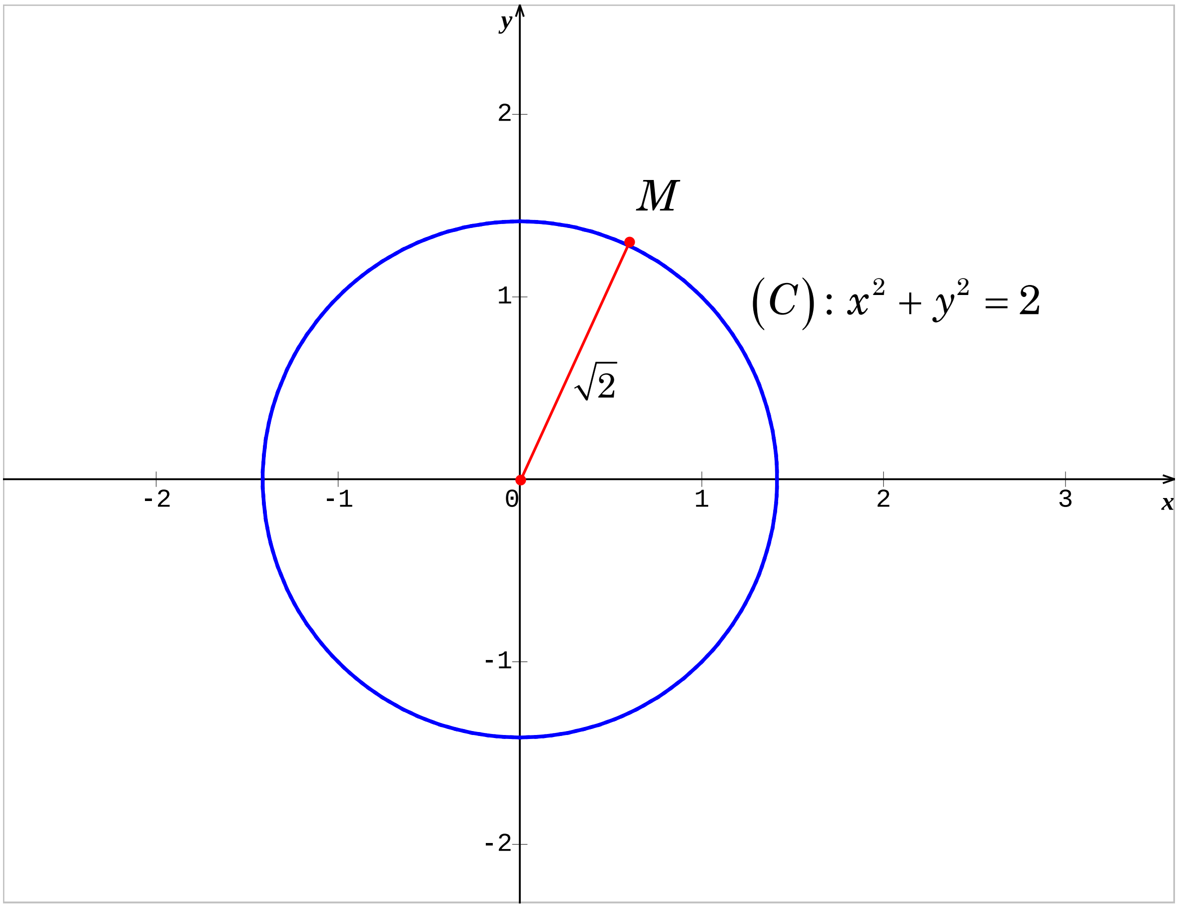
គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{1+2t-t^2}{1+t^2} + i\,\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$

បើគេយក $t = \tan\frac{\theta}{2}$ នោះ $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ ។

គេបាន $z=(\cos\theta+\sin\theta)+i(\cos\theta-\sin\theta)$

ម៉ូឌុល $|z|=\sqrt{(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត θ ។

ដោយ $OM=|z|=\sqrt{2}$ ចំពោះនោះសំណុំចំណុច M ជារង្វង់ផ្ចិត O កាំ $r=\sqrt{2}$ ដែលមានសមីការស្តង់ដា $(C): x^2+y^2=2$ ។



លំហាត់ទី៩៩

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេឲ្យចំណុច M មានអាហ្វិក z ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$4(z+\bar{z})^2+9z\bar{z}=25$ ដែល $\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z ។

ចូរកំណត់សំណុំនៃចំណុច M រួចសង់សំណុំចំណុចនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់សំណុំនៃចំណុច M រួចសង់សំណុំចំណុចនោះផង

គេមាន $4(z+\overline{z})^2+9z\overline{z}=225$ (1) ដែល $\overline{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z ។

តាង $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ ជាអាហ្វិកនៃចំណុច M ។

គេបាន $\overline{z}=x-iy$ ។ យក z និង $\overline{z}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

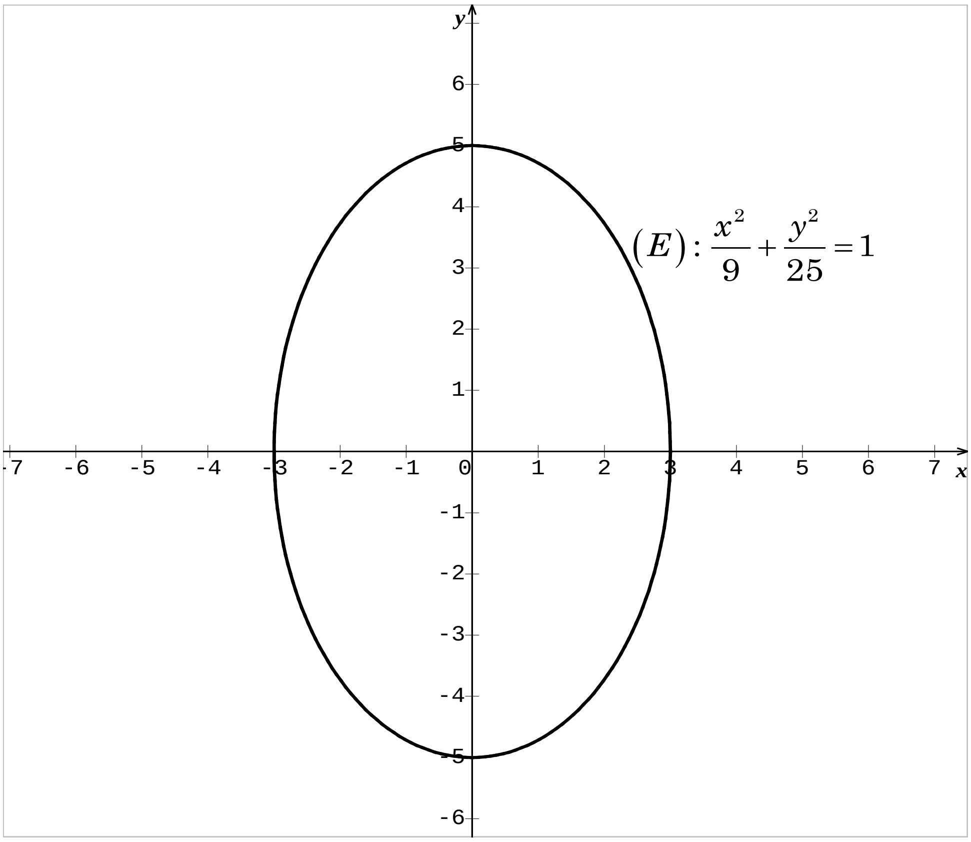
$$4(x+iy+x-iy)^2+9(x+iy)(x-iy)=25$$

$$16x^2+9(x^2+y^2)=25$$

$$25x^2+9y^2=225$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 225 គេបាន $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ជាសមីការអេលីបឈរ។

ដូចនេះសំណុំចំណុច M គឺជាអេលីបឈរមានផ្ចិត O មានអ័ក្សបណ្តោយ $2a=10$ និងអ័ក្សទទឹង $2b=18$ ។



លំហាត់ទី១០០

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច A,B,C មានអាហ្វិករៀងគ្នា z_a,z_b,z_c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} z_a - z_b = 1-7i \\ z_b - z_c = -7-i \end{cases}$

១.គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

២.ចូរកំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

៣.គេឲ្យ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AC]$ មានអាហ្វិក $z_i = 2+3i$ ។
ចូរកំណត់អាហ្វិកនៃកំពូលរបស់ត្រីកោណ ABC ។

៤.D ជាចំណុចមានអាហ្វិក $z_d = 6(1+i)$ ។
ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

យើងតាង T ជាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC នោះយើងបាន ៖

$$T = AB + BC + AC = |z_a - z_b| + |z_b - z_c| + |z_a - z_c|$$

ដោយ $\begin{cases} z_a - z_b = 1-7i \\ z_b - z_c = -7-i \end{cases}$ នោះ $z_a - z_c = (1-7i)+(-7-i) = -6-8i$

យើងបាន $T = \sqrt{1+49} + \sqrt{49+1} + \sqrt{36+64} = 10(\sqrt{2}+1)$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ $T = 10(\sqrt{2}+1)$ ឯកតាប្រវែង។

២.កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា

យើងមាន $\begin{cases} z_a - z_b = 1-7i \\ z_b - z_c = -7-i \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} z_a - z_b = 1-7i \\ z_c - z_b = 7+i \end{cases}$

នោះវ៉ិចទ័ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា $z_a - z_b = 1-7i$ និង $z_c - z_b = 7+i$

យក φ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ នោះ $\varphi = \arg\left(\frac{z_a - z_b}{z_c - z_b}\right)$

ដោយ $\frac{z_a - z_b}{z_c - z_b} = \frac{7+i}{1-7i} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ នោះ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ។

ហើយដោយ $AB = |z_a - z_b| = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$

$BC = |z_b - z_c| = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$ នោះ $AB = BC = 5\sqrt{2}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល B ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC គឺ $S = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 25$ ឯកតាផ្ទៃ។

៣.កំណត់អាហ្វិកនៃកំពូលរបស់ត្រីកោណ ABC

ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AC]$ មានអាហ្វិក $z_i = 2+3i$ នោះគេបាន

$z_i = \frac{z_a + z_c}{2} = 2+3i$ នោះ $z_a + z_c = 4+6i$ (1)

ដោយ $\begin{cases} z_a - z_b = 1-7i \\ z_c - z_b = 7+i \end{cases}$ នោះ $z_a - z_c = -6-8i$ (2)

បូកសមីការ $(1)\&(2)$ គេបាន $2z_a = -2-2i$ នោះ $z_a = -1-i$ ។

ដកសមីការ $(1)\&(2)$ គេបាន $2z_c = 10+14i$ នោះ $z_c = 5+7i$ ។

តាម $z_a - z_b = 1-7i$ នោះគេទាញ $z_b = z_a - 1 + 7i = -1-i-1+7i = -2+6i$

ដូចនេះ $z_a = -1-i$, $z_b = -2+6i$, $z_c = 5+7i$ ។

៤.ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល B

ហើយ I ជាចំណុចកណ្តាល $[AC]$ នោះត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ (C) ដែល

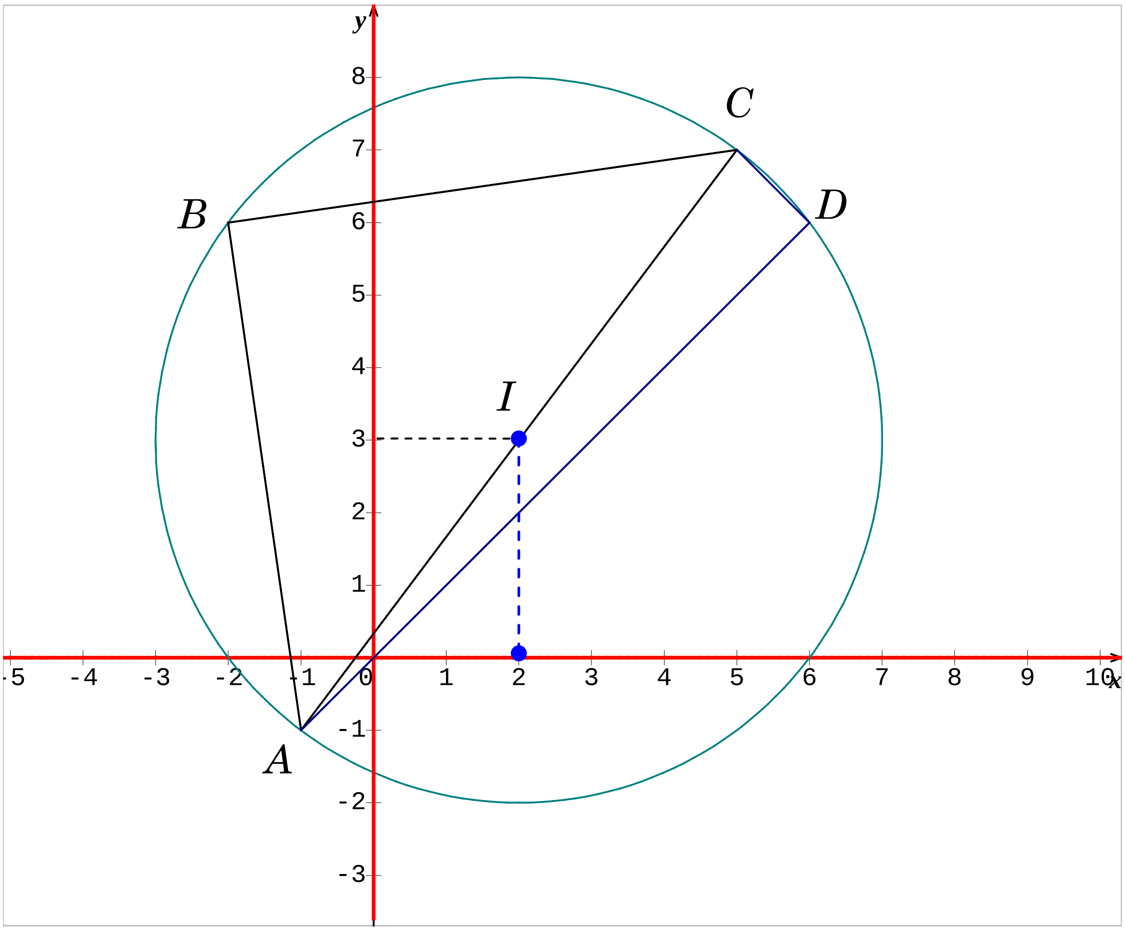
មានផ្ចិត $I(2+3i)$ និងកាំ $r=\frac{AC}{2}=\frac{1}{2}(10)=5$ ។ហេតុនេះដើម្បីស្រាយថា

$ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយគេគ្រាន់តែស្រាយឲ្យឃើញថាចំណុច $D\in(C)$ ពោលគឺ

$ID=r=5$ ។គេមាន $z_d - z_i = 6(1+i)-(2+3i)=4+3i$

នោះគេបាន $ID=|z_d - z_i|=\sqrt{9+16}=5=r$ សមមូល $D\in(C)$ ។

ដូចនេះចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មានផ្ចិត $I(2+3i)$ និងកាំ $r=5$ ។



www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១០១

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេមានបួនចំណុច A,B,C និង D មានអាហ្វិកតាង

រៀងគ្នាដោយ z_a, z_b, z_c និង z_d ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} z_a - z_b = -7+7i \\ z_b - z_c = 4+2i \\ z_c - z_d = 4-8i \end{cases}$

គេដឹងថា $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោង។

១.គណនាបរិមាត្ររបស់ចតុកោណ $ABCD$ ។

២.E ជាចំណុចមួយមានអាហ្វិក $z_e = -4+2i$ ដែល $\overrightarrow{AB} = \frac{7}{5}\overrightarrow{EC}$ ។

ចូរកំណត់អាហ្វិកនៃកំពូលរបស់ចតុកោណ $ABCD$ ។

៣.ចូរស្រាយថាប្រាំចំណុច A,B,C,D និង E ស្ថិតនៅលើរង្វង់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាបរិមាត្ររបស់ចតុកោណ $ABCD$

តាង p ជាបរិមាត្ររបស់ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ នោះគេបាន៖

$$P = AB + BC + CD + DA \text{ ដោយ } \begin{cases} AB = |z_a - z_b| \\ BC = |z_b - z_c| \\ CD = |z_c - z_d| \\ DA = |z_d - z_a| \end{cases}$$

នោះ $P = |z_a - z_b| + |z_b - z_c| + |z_c - z_d| + |z_d - z_a|$

គេមាន $\begin{cases} z_a - z_b = -7+7i & (1) \\ z_b - z_c = 4+2i & (2) \\ z_c - z_d = 4-8i & (3) \end{cases}$

បូកសមីការ$(1),(2)\&(3)$ គេបាន$z_a - z_d = 1+i$ ឬ $z_d - z_a = -1-i$

គេបាន $P = \sqrt{49+49} + \sqrt{16+4} + \sqrt{16+64} + \sqrt{1+1}$

$$= 7\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + \sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$$

ដូចនេះ $P = 2\left(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}\right)$ (ឯកតាប្រវែង)។

២.កំណត់អាហ្វិកនៃកំពូលរបស់ចតុកោណ $ABCD$

គេមាន E ជាចំណុចមួយមានអាហ្វិក $z_e = -4+2i$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB} = \frac{7}{5}\overrightarrow{EC}$ សមមូល $z_b - z_a = \frac{7}{5}(z_c - z_e)$

គេទាញ $z_c = z_e - \frac{5}{7}(z_a - z_b)$ ដោយ $\begin{cases} z_a - z_b = -7+7i \\ z_e = -4+2i \end{cases}$

គេបាន $z_c = -4+2i+5-5i = 1-3i$ ។

តាម $\begin{cases} z_a - z_b = -7+7i \\ z_b - z_c = 4+2i \\ z_c - z_d = 4-8i \end{cases}$ និង $z_c = 1-3i$ នោះគេទាញបាន ៖

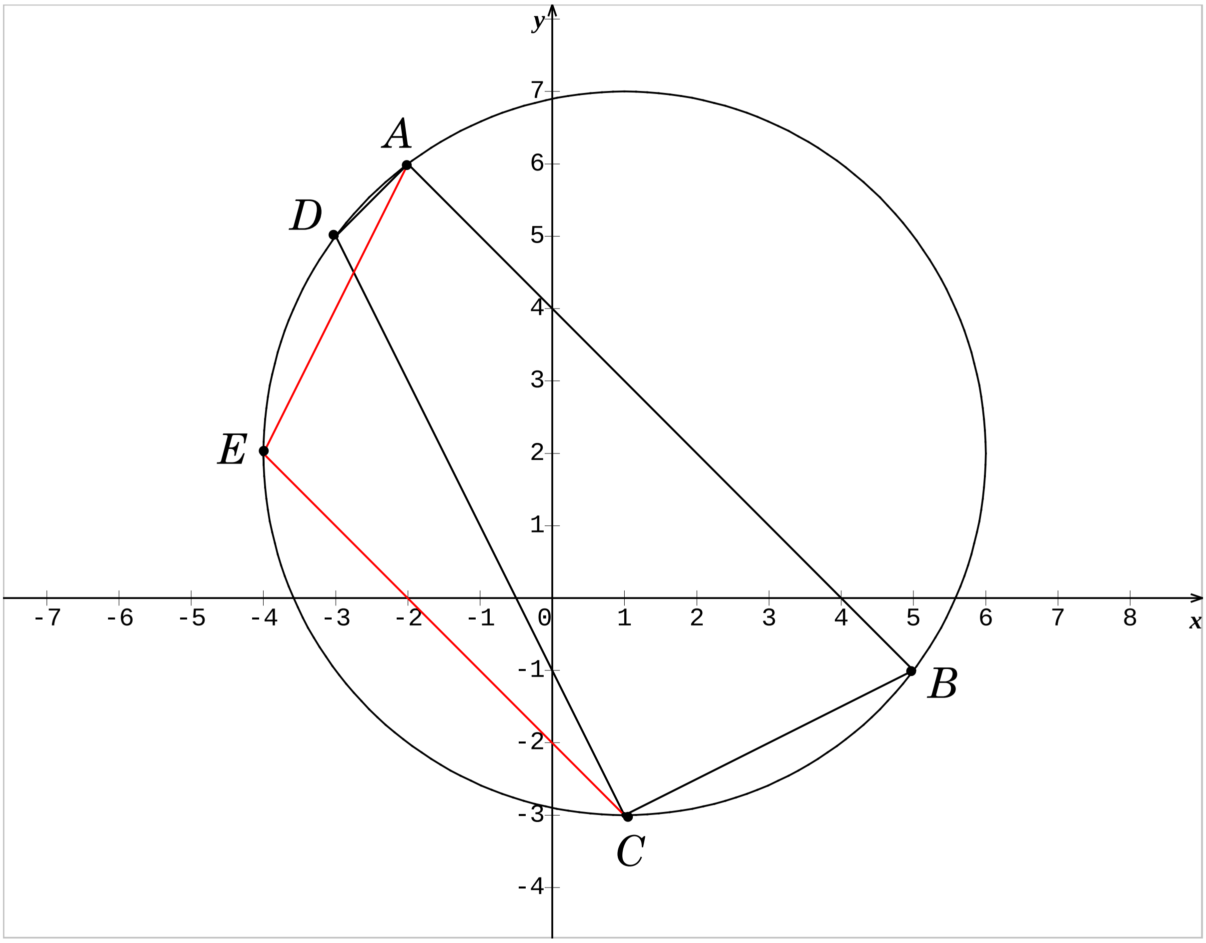
$$\begin{cases} z_b = z_c + 4 + 2i = 1-3i+4+2i = 5-i \\ z_a = z_b - 7 + 7i = 5-i-7+7i = -2+6i \\ z_d = z_c - 4 + 8i = 1-3i-4+8i = -3+5i \end{cases}$$

ដូចនេះ $z_a = -2+6i$, $z_b = 5-i$, $z_c = 1-3i$, $z_d = -3+5i$ ។

៣.ស្រាយថាប្រាំចំណុច A,B,C,D និង E ស្ថិតនៅលើរង្វង់មួយ

តាង $(C): x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$ ជាសមីការរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC

ដែលមានអាហ្វិកកំពូល $z_a = -2+6i$, $z_b = 5-i$, $z_c = 1-3i$ ។



គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 4+36-2p+6q+r=0 \\ 25+1+5p-q+r=0 \\ 1+9+p-3q+r=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} -2p+6q+r=-40 \\ 5p-q+r=-26 \\ p-3q+r=-10 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $p=-2$, $q=-4$, $r=-20$ ។

សមីការរង្វង់ទៅជា $(C): x^2+y^2-2x-4y-20=0$

អាចសរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដា $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=25$ ។

ចំណុច D មានអាហ្វិក $z_d=-3+5i$ នោះ $D(-3,5)$ ។

ចំណុច E មានអាហ្វិក $z_e=-4+2i$ នោះ $E(-4,2)$ ។

យកកូអរដោនេនៃចំណុច D និង E ទៅផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (C) ។

ចំពោះ $D(-3,5)$ នោះ $(-3-1)^2+(5-2)^2=25$ ឬ $16+9=25$ ពិត

ចំពោះ $E(-4,2)$ នោះ $(-4-1)^2+(2-2)^2=25$ ឬ $25+0=25$ ពិត

នោះគេបាន $D\in(C)$ និង $E\in(C)$ ។

ដូចនេះ ប្រាំចំណុច A,B,C,D និង E ស្ថិតនៅលើរង្វង់ (C) ដែលមានផ្ចិត $I(z_I=1+2i)$ និងកាំ $R=5$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៣

លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ

១.ចូរគណនាចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមរួចសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $z = 2(1+i)+3(1-i)$

ខ. $z = 3(1-i)-2(2-i)$

គ. $z = 3(1+2i)-i(2-i)$

ឃ. $z = 4(2+i)-3i(1+i)$

ង. $z = 3(2+5i)-4(1+3i)$

ច. $z = 5(1-2i)+7i(2+i)$

ឆ. $z = 2(-3+2i)+5i(-1-2i)$

ជ. $4(-3+2i)-3i(2+5i)$

ឈ. $z = -3(1-2i)+2i(1-3i)$

ញ. $z = 5(-1+2i)-2i(3+4i)$

២.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $z = (1+2i)(3+i)$

ខ. $z = (1-i)(3+2i)$

គ. $z = (2-i)(1+3i)$

ឃ. $z = (3-i)(1-2i)$

ង. $z = (2+i)^2$

ច. $z = (1+3i)^2$

ឆ. $z = (4-3i)^2$

ជ. $z = (3+2i)^2$

ឈ. $z = (2+i)^3$

ញ. $z = (1-2i)^3$

៣.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា៖

ក. $a+ib = (3-2i)^2$

ខ. $a-ib = (2+3i)^2$

គ. $2a+3ib = (3+i)^2$

ឃ. $3a-1+2ib = (2+i)^3$

ង. $(a-b)+i(a+b) = (1+i)(1+2i)$

ច. $i(a+ib) = (1-i)^3$

ឆ. $2a+i(b-1)=i(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2$ ជ. $3a+2ib=(5-i)^2$

ឈ. $i(a-ib)=(1+i)(2+i)^2$ ញ. $2a+ib=(5-i)^2$

៤.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $z=\dfrac{1+7i}{1+2i}$ ខ. $z=\dfrac{1+5i}{1-i}$

គ. $z=\dfrac{1+3i}{2+i}$ ឃ. $z=\dfrac{13i}{3-2i}$

ង. $z=\dfrac{3+i}{1+i}$ ច. $z=\dfrac{5+i}{3-2i}$

៥.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $a+i.b$ ៖

ក. $(2-5i)(3+i)$ ខ. $(1-i)(1+i)$

គ. $(1+i)(1-2i)(1+3i)$ ឃ. $(2-i)^3$

ង. $\dfrac{1}{4+3i}$ ច. $\dfrac{4+3i}{4-3i}$

ឆ. $\dfrac{(3+2i)(i+1)}{i-1}$ ជ. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$

ឈ. $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{2+i}$ ញ. $\dfrac{(i\sqrt{2}-\sqrt{3})(i\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1-i}$

៦.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

ក. $(1+2i)x+(3-i)y=5+3i$ ខ. $(2-i)x+(1+3i)y=4+5i$

គ. $(3+2i)x+iy=2(3+i)$ ឃ. $2ix+(3-i)y=3+5i$

ង. $(1+i)(x+iy)=7+3i$ ច. $(2-i)(x-iy)=10$

ឆ. $(1+i)x+3iy=\dfrac{3+5i}{1+i}$ ជ. $2ix-(3-2i)y=\dfrac{5-i}{1-i}$

ឈ. $3x+(5+2i)y=(2+i)^3$ ញ. $(x+y)+i(x-y)=(1+7i)^2$

៧.គណនា $(1+2i)^3$ និង $(3i-4)^4$

៨.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2+i$ និង $b=1-3i$ ។

ចូរសរសេរ $z=a^2+ab+b^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

៩.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមនេះជាទម្រង់ពីជគណិត

ក. $z=i(2-3i)^2$ ខ. $z=(2+3i)^2$

គ. $z=(1+i)(1+2i)(1+3i)$ ឃ. $z=\dfrac{3+i}{1+i}$

ង. $z=\dfrac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}$ ច. $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

ឆ. $z=(2+i)^3$ ជ. $z=[(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)]^2$

ឈ. $z=\dfrac{(1+i)(1+3i)}{(1-i)^2}$ ញ. $z=\dfrac{125i}{(2+i)^3}$

១០.គេឱ្យ $z_1=2-i$, $z_2=-1-2i$ និង $z_3=-1+3i$

$a)$ គណនា $z_1{}^3+z_2{}^3+z_3{}^3$ និង $z_1\times z_2\times z_3$

$b)$ បង្ហាញថា $z_1{}^3+z_2{}^3+z_3{}^3=3z_1z_2z_3$ ។

១១.គេឱ្យ x ជាចំនួនពិត ។

កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត។

១១.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច និង $w=1-i$.

$a)$ គណនា $z+w$, $z-w$, $z\times w$ និង $\frac{z}{w}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

$b)$ ចូរកំណត់ពីចំនួនពិត α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\alpha z+\beta w=2zw$ ។

១២.មានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1=a+i.b$ និង $z_2=b-i.a$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

ចូរកំណត់តម្លៃរបស់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $z_1+z_2=7+5i$ ។

១៣.គេឲ្យ $a=-2+2i\sqrt{3}$ និង $b=\sqrt{3}+i$ ។

ចូរស្រាយថា $Z=a^2+b^2+2a+2bi$ ជាចំនួនពិត ។

១៤.ចូរគណនា $Z=\frac{(5+3i)^2}{1-i}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

រួចបញ្ជាក់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតរបស់វា ។

១៥.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2+i, b=-3+2i$ និង $c=1-3i$ ។

$a)$ គណនា $Z=a^3+b^3+c^3$ និង $W=abc$ ។

$b)$ កំណត់ចំនួនពិតλ ដោយដឹងថា $Z=\lambda W$ ។

១៦.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=-1+5i$ និង $W=1+i$ ។

គណនា $Z+W$, $Z-W$, $Z\times W$ និង $\frac{Z}{W}$ ដោយសរសេរជារាងពីជគណិត ។

១៧.កំណត់ចំនួនពិតaនិងbដើម្បីឱ្យ $(2-3i)$ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$។

១៨.ចូរកំណត់រកពីរចំនួនពិតxនិងyដោយដឹងថា ៖

$$(1+3i)x+(2-i)y=\frac{2+19i}{1+2i}$$ ។

១៩.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$ ដែល $x, y \in \mathbb{R}$ ។

ចូរកំណត់ z ដោយដឹងថា $(3+2i)z + (2-i)\bar{z} = \dfrac{2(8-9i)}{1-3i}$ ។

($\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z)

២០.គណនា $z = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2019}$ ។

២១.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 + 3i$ និង $w = 2 + 5i$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $z^2 - 4z + 13 = 0$ និង $w^2 - 4w + 29 = 0$ ។

ខ.គណនា $X = z^2 + w^2$ និង $Y = z^3 + w^3$ ។

២២. កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា ៖

ក. $(1+3i)(x+iy) - (2+i)(x-iy) + 7 = 0$ ។

ខ. $(3+2i)x + (1-3i)y = \dfrac{5(1+3i)}{1+2i}$ ។

២៣.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 5}{z^2 + 1}$ ដែល $z \neq \pm i$ ។

ចូរគណនា $f(-1+2i)$, $f(1+i)$ និង $f(2-i)$ ។

២៤.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 2 + i$ និង $b = 1 - 3i$ ។

ចូរសរសេរ $z = a^2 + b^2 + a + ib$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

២៥.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 3 + 5i$ និង $w = 1 - i$ ។

ចូរគណនា $z + w$, $z - w$, $z \times w$ និង $\dfrac{z}{w}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាដែលបាន ជាទម្រង់ពីជគណិត $a + ib$ ។

២៦.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $\alpha = 1+2i$, $\beta = 2+3i$ និង $\gamma = 3+4i$ ។

ក.ចូរគណនា $p = \alpha+\beta+\gamma$, $q = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $r = \alpha\beta\gamma$ ។

ខ.បង្ហាញថា $z = (1+i\alpha)(1+i\beta)(1+i\gamma) = 1-q+i(p+r)$ រួចសរសេរលទ្ធផល ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២៧.ក)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = 2+3i$ និង $y = 3-i$ ។

ចូរគណនា $z = \dfrac{x^2-3x+4}{y^2-5y+8}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x = 2+i$ និង $y = 1+3i$ ។

ចូរគណនា $A = \dfrac{3}{3x-x^2}+\dfrac{1}{y}$ ។

២៨.កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា ៖

ក.$(3+2i)x+(1-3i)\text{y} = 9-5i$

ខ.$(1+i)x-(3-2i)y = 2+7i$

គ.$(1-i)(x+iy)+(1+3i)(x-iy) = 2(7+3i)$

២៩.កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 2+i$ ជាឫសមួយរបស់ សមីការ $z^3+pz+q = 0$ ។

៣០.ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}(1+i)z+iw = 7i\\ iz+(1-i)w = 1+2i\end{cases}$

៣១.គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(4-i)z+5+i = 0$

ក.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-5-12i = (2-3i)^2$ ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

៣២.ចូររកពីរចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $z=3+2i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ

$z^2+(a+ib)z+1+5i=0$ ។

៣៣.គេឱ្យ $z=1+2i$ និង $u=a+i.b$ ។

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $u=1+z+z^2+z^3+z^4$ ។

៣៤.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(2+i)^3$ និង $w=(3-i)^2$ ។

ក.សរសេរ z និងw ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរកំណត់ពីចំនួនពិត α និង β ដោយដឹងថា $\alpha z+\beta w=(4+2i)^2$ ។

៣៥.គេចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ។

កំណត់ពីរចំនួន x និង y ដោយដឹងថា ៖

$(1+3i)z+(2+i)\bar{z}=(2+i)(3+2i)$ ($\bar{z}$ ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃz)។

៣៦.គេឲ្យសមីការ $(E):z^2-(7+2i)z+a+4(1+i)^2=0$ ។

ក.ចូរកំណត់ចំនួនពិតaដើម្បីឲ្យសមីការ(E)មានឫសមួយជាចំនួនពិតនិងឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ខ.រកឫសនៃសមីការ(E) ចំពោះតម្លៃa ទើបនឹងរកឃើញ។

៣៧.គេឲ្យសមីការ $(E): z^3-(4+i)z^2+(5+4i)z-5i=0$ ។

ក.កំណត់ចំនួនពិត b ដោយដឹងថា$z_0=bi$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ.បង្ហាញថាគេអាចសរសេរសមីការ (E) ខាងលើជាទម្រង់

$(z-z_0)(z^2+\alpha z+\beta)=0$ ដែល $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ។

៣៨.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=\frac{1+5i}{3+2i}$, $B=\frac{-2+6i}{1+i}$ និង $C=\frac{8+6i}{1-i}$

ក. ចូរសរសេរ A , B , C ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B^2-4A.C=4(2-i)^2$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $A\ Z^2+B\ Z+C=0$ ដោយសរសេរឫសនីមួយៗ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

៣៩.គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

ក. $z=-48+14i$

ខ. $z=-24-10i$

គ. $z=12+16i$

ឃ. $z=32-24i$

ង. $z=18i$

៤០.ចូររកគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើនឹង $2\sqrt{2}$ ហើយការេរបស់វាជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

៤១.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(3\cos a-4\sin a)+i(4\cos a+3\sin a)$

ដែល a ជាចំនួនពិត ។ចូរស្រាយថាម៉ូឌុលនៃ z មានតម្លៃថេរជានិច្ចទោះបី តម្លៃ a ប្រែប្រួលយ៉ាងណាក៏ដោយ ។

៤២.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(2x+3y)+i(3x-2y)$ និង $w=\frac{17+6i}{2+i}$

ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។

ក.ចូរសរសេរ w ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.កំណត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ។

៤៣.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(x+y)+i(x-y)$ និង $w=\dfrac{2(2+i)^2}{1+i}$

ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។ កំណត់ x និង y ដោយដឹងថា $|z|=|w|$

និងផ្នែកពិតនៃ z^2 ស្មើនឹង 48 ។

៤៤.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ដែល $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $w=\dfrac{z+i\bar{z}}{1+i}$ ជាចំនួនពិត ។

ខ.កំណត់តម្លៃ x និង y ដោយដឹងថា $|z|=5$ និង $w=7$ ។

៤៥.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=x+iy$, $B=a+ib$ និង $z=(ax+by)+i(ay-bx)$

ដែល $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ ។ ចូរស្រាយថា $|\mathrm{z}|=|A||\mathrm{B}|$ ។

៤៦.ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z មានម៉ូឌុល $|z|$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក.$|z|+iz=2(1+2i)$ ខ.$|z+1|-iz=9-2i$

គ.$|z-i|+(1+i)z+(1+2i)^3=0$ ឃ.$|z+3+i|+iz=3+i$

៤៧.ក. ចូរបង្ហាញថា $-77-36i=(2-9i)^2$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $(2+i)z^2-(8-i)z+5(3-i)=0$

រួចសរសេរឫសនីមួយៗជាទម្រង់ពីជគណិត ។

៤៨.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$ និង $w=b+ia$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}^*$ ។

ចូរស្រាយថា z^2+w^2 ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

៤៩.ចូរគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=45+28i$ ។

៥០.កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+2i$ ជាឫសមួយរបស់

សមីការ $z^3+pz+q=0$ ។

៥១.ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច

$$\begin{cases}(1-i)x+(3+2i)y=10-2i\\(1+2i)x+(2-i)y=\dfrac{10}{(1-i)^2}\end{cases}$$

៥២.កំណត់ពីរចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា ៖

ក.$(3+2i)x+(1-3i)\,\mathrm{y}=9-5i$

ខ.$(1+i)x-(3-2i)y=2+7i$

គ.$(1-i)(x+iy)+(1+3i)(x-iy)=2(7+3i)$

៥៣.ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases}(1-i)z-iw=-7i\\-iz+(1+i)w=1-2i\end{cases}$

៥៤.គេឲ្យសមីការ $(E): z^2+(4-i)z+5+i=0$

ក.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-5-12i=(2-3i)^2$ ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ(E)ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

៥៥.ចូររកពីរចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $z=3-2i$ ជាឫសមួយរបស់

សមីការ $z^2+(a+ib)z+1+5i=0$ ។

៥៦.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+b.i\ \ , a,b\in\mathbb{R}$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{1}{6}z^2+\dfrac{2}{3}z=-2+i$ ។

៥៧.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(2-i)^3$ និង $w=(3+i)^2$ ។

ក.សរសេរ z និងw ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរកំណត់ពីចំនួនពិត α និង β ដោយដឹងថា $\alpha z+\beta w=(4-2i)^2$ ។

៥៨.គេចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ។

កំណត់ពីរចំនួន x និង y ដោយដឹងថា ៖

$(1+3i)z+(2+i)\overline{z}=(2+i)(3+2i)$ ($\overline{z}$ ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃz)។

៥៩.គេឱ្យសមីការ $(E): z^3-(4+5i)z^2-5(1-3i)+2(7-i)=0$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឱ្យ $z_0=bi$ ជាឫសសមីការ (E) ។

ខ. ចូរសរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z-z_0)(z^2+pz+q)=0$

ដែល p និង qជាចំនួនកុំផ្លិចត្រូវរក ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

៦០.គេឲ្យសមីការ $(E): z^3-(4+i)z^2+(5+4i)z-5i=0$ ។

ក.កំណត់ចំនួនពិត b ដោយដឹងថា$z_0=bi$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ.បង្ហាញថាគេអាចសរសេរសមីការ (E) ខាងលើជាទម្រង់ដូចខាងក្រោម៖

$(z-z_0)(z^2+\alpha z+\beta)=0$ ដែល $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ។

៦១.គេមានសមីការ (E): $z^2-3z+4+6i=0$

ក.កំណត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឱ្យ $z_0=b.i$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

៦២. គេមានសមីការ $(E): z^2 - 5(1+i)z - 3(4-3i) = 0$ ។

ក.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $48+14i = (7+i)^2$ ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

៦៣.គេមានសមីការ $(E): z^2 - 5(1+i)z - 3(4-3i) = 0$

ក.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $48+14i = (7+i)^2$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

៦៤.គេមានសមីការ $(E): i.Z^2 - (2+3i)Z + 5(1+i) = 0$

ក. កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យ $Z_1 = a+i$ ជាឬសមួយរបស់សមីការ (E)

រួចគណនាឫស Z_2មួយទៀតរបស់សមីការ ។

ខ. ចូរកំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $\frac{p}{Z_1} + \frac{q}{Z_2} = \frac{p+q-2}{Z_1+Z_2}$ ។

៦៥.គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2ដែល $Z_1 + Z_2 = 3+i$ និង $Z_1.Z_2 = 4+3i$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $(Z_1)^2 + (Z_2)^2 = 0$ ។

ខ. ចូរកំណត់រកផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិត នៃ $Z = Z_1{}^4 + Z_2{}^4$ ។

គ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $(Z_1+Z_2)^2 - 4Z_1.Z_2 = -(Z_1+Z_2)^2$ រួចកំណត់រកZ_1 និង Z_2 ។

៦៦.ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z មានម៉ូឌុល$|z|$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក.$|z| + iz = 2(1+2i)$

ខ.$|z+1| - iz = 9-2i$

គ.$|z-i| + (1+i)z + (1+2i)^3 = 0$

ឃ.$|z+3+i| + iz = 3+i$

៦៧.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យ $z=2+3i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ $z^2+\alpha z+\beta=0$ រួចគណនាឫសមួយផ្សេងទៀតរបស់សមីការចំពោះ α និង β ទើបរកឃើញខាងលើ ។

៦៨.ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដោយដឹងថា $(3+2i)\alpha+(2-i)\beta=4+5i$ ។

៦៩.គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): z^2-(4+3i)z+1+5i=0$

ក.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $3+4i=(2+i)^2$ ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ខាងលើក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ។

៧០.ចូរកំណត់រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$(1+i)z+(3+2i)\bar{z}=9+4i$ ។ ($\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z)។

៧១.គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(3+2i)z+a+4i=0$ ដែល a ជាចំនួនពិត ។

ក.ចូរកំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ (E) មានឫសមួយជាចំនួនពិត និង ឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ a ទើបរកឃើញ ។

៧២.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $|zw|=|z||w|$

ខ. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ ដែល $w\neq 0$ ។

គ. $|z+w|\leq|z|+|w|$

៧៣.ចូររកចំនួនកុំផ្លិច z ដោយដឹងថា $|z|+(1+i)z=(2+i)(3+2i)$ ។

៧៤.រកចំនួនកុំផ្លិច z ដោយដឹងថា $|z+i|+iz=(2+i)^2$ ។

៧៥.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

ក. $z = 2\sqrt{3} + 2i$ ខ. $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

គ. $z = -1 + i\sqrt{3}$ ឃ. $z = -\sqrt{3} - i$

ង. $z = 2 + \sqrt{3} + i$ ច. $z = \sqrt{2} + 1 + i$

ឆ. $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ជ. $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

ឈ. $z = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ ញ. $z = \sin\frac{3\pi}{8} + i\cos\frac{3\pi}{8}$

៧៦.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ ។

ក.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.សរសេរ $u = 1 + i$ និង $v = \sqrt{3} + i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z ។

គ.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ និង } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

៧៧.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 1 + i\sqrt{3}$ និង $w = 2 + 2i$

ក.ចូរសរសេរ $Y = zw$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

នៃ $Y = zw$ ។

គ.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

៧៨.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $u=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$ និង $v=2+2i$ ។

ក.ចូរសរសេរ $w=uv$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.សរសេរ v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ u ។

៧៩.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ។

ក.ចូរសរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z ។

៨០.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=1+\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ Z និង Z^4 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៨១.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}$ ។

ចូរសរសេរ Z និង $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៨២.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos a+i\sin a$ និង $w=\frac{2z^5}{1+z^4}$ ដែល $a\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ ។

ចូរស្រាយថា $w=\frac{1}{\cos 2a}(\cos 3a+i\sin 3a)$ ។

៨៣.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ដែល $\alpha\in\mathbb{R}$ ។

គ្រប់ $n\in\mathbb{Z}$ ចូរស្រាយថា $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(n\alpha)$ ។

៨៤.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2\sqrt{3}+2i$ និង $b=2-2i$

ក.ចូរសរសេរ $Z=a^2+b^2-4a+4\sqrt{3}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ a,b និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៨៥.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1-i$ និង $w=\sqrt{3}+i$ ។

ក.គណនា $z.w$ និង $\frac{z}{w}$ ។

ខ.សរសេរ $z.w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៨៦.សរសេរ $A=\frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រហើយជាទម្រង់ពីជគណិត ។

៨៧.ឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$ និង $A=i(1+z)$ ។

ក.គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យបាន $A=z$ ។

គ.សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $w=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនា w^4 ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

៨៨. Z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6})$ ។

ក.សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

៨៩.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=x+iy$ និង $w=\cos\alpha+i\sin\alpha$

ដែល x និង y ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ហើយ α ជាចំនួនពិត។

ក.កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z|=|w|$ ។

ខ.ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z|=|w|$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$ ។

គ.រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z=1\,,w=1$ ។

៩០.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ និង $B=\frac{x+iy}{1+i}$

ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។

ក.សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិតហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រក x និង y ដោយដឹងថា

$\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)។

៩១.ក)ចំនួនកុំផ្លិច Z មានម៉ូឌុលស្មើ 2 និងអាគុយម៉ង់ស្មើ $\frac{\pi}{3}$ ។

សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត $a+ib$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត

ខ)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Y=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$ ។

គណនា $Z.Y$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គ)បង្ហាញថា $\overline{Y}=Z$ ។

៩២.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $w=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ក.បង្ហាញថា $z^2=w$ រួចគណនា z^2+z+1 ។

ខ.គណនា $A=z^2+z+i$ ។ សរសេរ A ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គ.បង្ហាញថា A^{20} ជាចំនួនពិត ។

៩៣.ក)កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ

$x^2 + ax + b = 0$ ។

ខ)រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ ។

គ)សរសេរ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៩៤.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 1 + i\sqrt{3}$ និង $b = \sqrt{3} + i$

ក.ចូរគណនា $z = a^2 + iab + b^2$ និង $w = (\sqrt{3} - 1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ ដោយសរសេរ

លទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{z}{w} = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ ។

៩៥.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z = 2 + 2i$

ខ. $z = 2\sqrt{3} - 2i$

គ. $z = -4 + 4i\sqrt{3}$

ឃ. $z = -1 - i\sqrt{3}$

ង. $z = \sin\frac{3\pi}{8} + i\cos\frac{3\pi}{8}$

ច. $z = 1 + \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$

ឆ. $z = 1 + i\tan\frac{\pi}{5}$

ជ. $z = 2 + \sqrt{3} + i$

ឈ. $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

ញ. $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

៩៦.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ និង $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។

ចូរសរសេរ z, w , $z \times w$ និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៩៧.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 + 2i$ និង $w = \sqrt{3} + i$ ។

ក.ចូរសរសេរ $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ.ចូរសរសេរ z , w និង $\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

៩៨.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = 1 + i\sqrt{3}$ និង $b = \sqrt{3} + i$

ក.ចូរគណនា $z = a^2 + iab + b^2$ និង $w = (\sqrt{3} - 1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$

ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{z}{w} = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ ។

៩៩.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{3} - i$ និង $w = \sqrt{3} + 3i$

ក.ចូរគណនា $Z = z^2 + w^2$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.គណនាឫសទីបីនៃ Z ។

១០០.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ និង $w = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

ក.ចូរគណនា $Z = zw$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.សរសេរ Z និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

នៃ w ។

គ.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

១០១.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ។

ក.ចូរគណនា z^2 ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.សរសេរ z^2ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z ។

១០២.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}$ ។

ចូរសរសេរ z និង z^4 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

១០៣.ចូរគណនាម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $w=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ។

១០៤.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ និង $b=1+i$ ។

ក.ដោយដឹងថា $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ និង $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $ab=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ។

ខ.សរសេរ ab និង b ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ a ។

គ.គេយក $z=x+iy$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ។ ដោយដឹងថា $2z+i\bar{z}=a^4$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ x និង y ។

១០៥.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=-\sqrt{3}+i$ និង $b=\sqrt{2}(1+i)$

ក.គណនា $z=a^2+b^2+3a\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-3i)b$

ខ.កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z ។

គ.ចូរសរសេរ $u=a.b$ និង $v=\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

១០៦.ចូរគណនាម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $w=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

១០៧.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

ក.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.សរសេរ $u=1+i$ និង$v=\sqrt{3}+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរក

ទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រនៃ z ។

គ.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ និង } \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

១០៨.ចូរគណនាម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $w=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ។

១០៩. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $w=(1+z)^6$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

www.mathtoday.wordpress.com